# آزمون والد

آزمون والد از ابداعات آمارشناس مشهور آبراهام والد (1902-1950) است که کاربردهای فراوان دارد. آزمون والد یک آزمون آماری پارامتری است که برای ارزیابی درستی فرضیه یا فرضیه هایی درباره‌ی یک پارامتر$\theta$ یا برداری از پارامترها $\boldsymbol{\theta}$ به کار می‌رود.

هرگاه قانون حاکم بر اقلام داده‌های یک نمونه را بتوان به صورت یک مدل آماری شامل پارامترهایی مجهول بیان کرد، لازم می‌شود که پارامترها از روی نمونه برآورد شوند. آزمون والد برای آزمون مقدار واقعی پارامتر بر پایه برآوردی از آن از داده‌های نمونه به کار گرفته می‌شود. فرض کنید اقتصاددانی داده‌هایی را در خصوص طبقه اجتماعی و میزان پس‌انداز (به صورت درصدی از درآمد قابل تصرف) در نمونه‌ای از جامعه‌ای مشخص در اختیار دارد. وی می‌خواهد بداند که رابطه‌ی بین میزان پس‌انداز و طبقه اجتماعی در این جامعه چگونه است و اصولاً رابطه‌ای بین این دو متغیر وجود دارد یا نه. گیریم پارامتر$\theta$ تفاوت میانگین های میزان پس‌انداز را برای افراد طبقه بالا و طبقه متوسط نشان دهد. آنگاه برای آزمون نبود تفاوت بین این دو طبقه اجتماعی از لحاظ میزان پس‌انداز، می‌توان از آزمون والد برای آزمون فرضیه صفر$\theta=۰$ استفاده کرد. در صورت رد نشدن این فرضیه صفر، می‌توان گفت که طبقه اجتماعی در میزان پس‌انداز نقشی ندارد. در این چیدمان، مقدار واقعی پارامتر$\theta$ بر اقتصاددان مجهول است. وی می‌تواند برآوردی از آن را از تفاوت میانگین های نمونه‌ای درآمد افراد متعلق به طبقه بالا و درآمد افراد متعلق به طبقه متوسط برآورد کند. در آزمون والد از این برآورد و برآوردی از ملاک تغییرات تصادفی آن (که در زیر توضیح داده خواهد شد) برای نتیجه‌گیری درباره مقدار مشاهده نشده$\theta$ استفاده می‌شود. در کاربردی دیگر فرض کنید پزشکی می‌خواهد بداند که سیگار کشیدن خطر ابتلا به سرطان ریه را افزایش می‌دهد یا نه. در این مثال افزایش خطر را با پارامتر$\theta$ نشان می‌دهیم که نسبت احتمال ابتلا به سرطان در افراد سیگاری به احتمال ابتلا به سرطان در افراد غیرسیگاری است. پس اگر مقدار واقعی و مجهول$\theta$ بزرگتر از یک باشد، سیگارکشی خطر ابتلا به سرطان ریه را افزایش می‌دهد. در این مثال از آزمون والد برای آزمون فرضیه صفر$\theta = ۱$ (یعنی نبود اثر سیگارکشی) استفاده می‌شود. آزمون والد در مدل های آماری گوناگون از جمله مدل های مربوط به متغیرهای گسسته دوحالتی و چندحالتی و متغیرهای پیوسته می‌تواند به کار بسته شود، ( هارل، ۲۰۰۱ ص. ۵۶).

## روش اجرای آزمون والد

در حالت تک پارامتری، برای انجام آزمون والد مبنی بر آزمون فرضیه صفر $\theta=\theta.$ در مقابل فرضیه $\theta.$ □ $\theta$ ابتدا برآورد حداکثردرستنمایی پارامتر$\theta$ از داده های نمونه به صورت $\hat{\theta}$ به دست آورده می‌شود. سپس تفاوت مقدار برآورد شده و مقدار مفروض در فرضیه صفر $(\hat{\theta} - \theta.)$ در قیاس با خطای معیار $\hat{\theta}$ (که با $SE(\hat{\theta})$ نشان داده می‌شود) سنجیده می‌شود. برآوردی معقول از خطای معیار $\hat{\theta}$ از وارون جذر مقدار اطلاع فیشر به ازای $\theta$ به دست آورده می‌شود که عبارت است از

$$SE(\hat{\theta}) = [ I_n(\hat{\theta}) ]^{-½}$$

از آنجا که برای نمونه‌های نسبتاً بزرگ برآورد حداکثر درست‌نمایی تقریباً دارای توزیع نرمال است، آماره والد

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0) / SE(\hat{\theta}) = [ I_n(\hat{\theta}) ]^{½} (\hat{\theta} - \theta_0)$$

دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد بود و می‌تواند برای آزمون معقول بودن $\theta_0$ به جای $\hat{\theta}$ در پرتو اطلاعات نمونه به کاررود. صورتی معادل از آماره والد عبارت است از

$$W^* = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 I_n(\hat{\theta})$$

این آماره به شرط درست بودن فرضیه صفر دارای توزیع

خی‌دو با یک درجه آزادی است. مقدارهای بزرگ آن بیـانگر نادرستی فرضیه صفرند.

در مسـئله‌هـایی کـه بـا بـردار پـارامتر **θ** سـر و کـار داریـم، آمارهٔ $W^*$ به صورت یک فرم درجه دوم درمی‌آید:

$$W^* = (\boldsymbol{\theta}^{\wedge} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}^{\wedge})\, (\boldsymbol{\theta}^{\wedge} - \boldsymbol{\theta}_0)$$

در این فرمول، T به معنای برگردان بردارستونی به بردار سـطری و $I_n(\theta^{\wedge})$ ماتریس اطلاع فیشر است. آمارهٔ $W^*$ نیز دارای توزیـع خی‌دو اما درجه آزادی آن برابر با بُعد**θ** است.

آزمون نسبت درستنمایی بدیلی برای آزمـون والـد اسـت. از آنجا که این دو آزمون مجانباً (برای نمونه‌های بسیار بـزرگ) معادل‌اند، اغلب به نتیجه‌گیری های مشابه می‌انجامند امـا در نمونه‌های کوچک می‌توانند نتیجه‌های متفاوت داشته باشند.

چند دلیل برای برتری آزمون نسبت درسـتنمایی بـر آزمـون والـد ارائـه شـده‌انـد. نخسـت آنکـه بـا توجـه بـه چگـونگی فرمول‌بندی پرسش پژوهش، آزمون والد مـی‌توانـد پاسـخ‌هـای متفاوت بدهد، ( فی یـرز و همکـاران، ۱۹۹۶ ص. ۱۴۵). بـرای مثال، در خصوص افزایش خطر ابـتلا بـه سـرطان ریـه بـر اثـر سیگارکشی، فرضیه $\theta = 1$ معـادل فرضـیه $\log(\theta) = 0$ اسـت. امـا آماره آزمون برای آن دو یکسان نیست زیرا رابطـه روشـنی بـین خطای معیار $\theta$ و خطای معیار $\log(\theta)$ وجود ندارد. در حـالی کـه روش آزمون نسـبت درسـتنمایی جـواب دقیقـاً یکسـان بـه دو فرمول‌بندی بالا می دهد. در این مسئله خاص و در حالت کلـی به هر تبدیل یکنوا (کاهشی یا افزایشـی) از $\theta$ جـواب بـی تغییـر باقی می ماند. دلیل دیگر آن اسـت کـه آزمـون والـد شـامل دو تقریب است. یکی اینکه از برآورد خطای معیار $SE(\theta^{\wedge})$ به جای انحـراف معیـار و دوم اینکـه از توزیـع تقریبـی $W^*$ (خـی‌دو) استفاده می‌کند، در حالی که آزمـون نسـبت درسـتنمایی از یـک تقریب مبنی بر اینکه توزیع آماره آزمون خـی‌دو اسـت، اسـتفاده می‌کند.

بدیلی دیگر برای آزمون والد، آزمون امتیاز است. این آزمون این مزیت را دارد که می‌تواند در وضعیت هایی کـه بـرآورد کـردن تغییرپـذیری مشـکل اسـت نیـز فرمـول‌بنـدی شـود، (آگرستی، ۲۰۰۲ ص. ۱۱۲).

در اِنگل، (۱۹۸۳ ص. ۲۳۵) نشان داده شـده اسـت کـه سـه آزمون والد، نسبت درستنمایی، و ضریب لاگرانژ (که بـه نـام آزمون امتیاز نیز شناخته می‌شود) مجانباً معادل‌اند.

### کتاب‌شناسی


Harrel, Frank E. Jr. (200). *Regression Modeling Strategies*, New York, Springer-Verlag.

Fears, Thomas R., Benichom, Jacques, and Gail, Mitchell H. (1996). A Reminder of Fallibility of the Wald Statistic. *The American Statistician*, 50 (3), pp. 226-227.

Agresti, Alan (2002). *Categorical Data Analysis (2n ed.).* New York, Wiley.

Engle, Robert F. (1983). Wald, Likelihood Ratio, and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics.

in Intriligator, M. D. and Griliches, Z., *Handbook of Econometrics. II.* Elsevier. pp. 796–801.



**محمدرضا مشکانی**

**هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی**