برنامه‌ریزی پویا

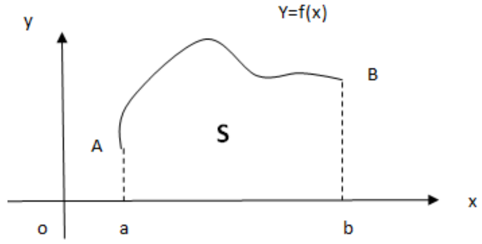
Dynamic Programming

۰) مقدمه:

دستیابی به بهترین نتایج برای شرایط داده‌شده‌ای را بهینه‌سازی گویند. اگر در حل مسائل بهینه‌سازی از ابزارهای ریاضی استفاده شود، مسئله بهینه‌سازی را بهینه‌سازی ریاضی یا برنامه‌ریزی ریاضی گویند. برنامه ریاضی به دو شاخه مهم ایستا و پویا تقسیم می‌شود. **در** برنامه‌ریزی ایستا متغیرها مستقل از زمان و **در** برنامه‌ریزی پویا متغیرها تابعی از زمان‌اند. مسئله برنامه‌ریزی پویا را مسئله کنترل بهینه نیز می‌نامند. در این نوشتار ابتدا اشاره‌ای به تاریخچه این مسئله و تعریف آن داشته، سپس سه روش حل این مسئله، حساب تغییرات، اصل ماکزیمم پونتری اگین و روش برنامه‌ریزی پویا تشریح می شود. ریاضیات موردنیاز این بحث، حساب دیفرانسیل و انتگرال، معادلات دیفرانسیل (پورکاظمی، ۱۳۸۹) و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است.

۰-۱) تاریخچه برنامه‌ریزی پویا

در سال‌های پایانی قرن هفدهم مسائلی در فیزیک و ریاضی مطرح شد که دو قرن بعد آن‌ها را به‌عنوان برنامه‌ریزی پویا و کنترل بهینه تعریف شد. ازجمله مسئله **هم‌محیطی** (Isoperimetric) است. طنابی به طول ثابت l بین دو نقطه ثابت B و A قرار دارد، شکل طناب را چنان تعیین کنید که مساحت S، سطح محصور بین طناب و محور xها مطابق شکل (۱) ماکزیمم شود.



شکل (۱)

اگر معادله طناب AB، $y = f(x)$ فرض شود با تغییر معادله طناب مساحت $S = \int_a^b y dx$ تغییر می‌کند ولی طول آن $\int_a^b \sqrt{1+\dot{y}^2}dx = l$ ثابت است. پس مسئله تعیین تابع y است، به‌طوری که:

$$MaxS = \int_a^b y dx$$

$$s.t. \int_a^b \sqrt{1+\dot{y}^2}dx = l$$

این مسئله و نظایر آن طی قریب چهل سال توسط ریاضیدانان بزرگی مانند برنولی، اویلر، لژاندر و درنهایت لاگرانژ با ایجاد شاخه‌ای از ریاضیات به‌نام حساب تغییرات (Calculus Variation) حل شد. نزدیک به دویست سال از بحث فوق در ریاضی و فیزیک می‌گذشت، برای اولین‌بار در سال ۱۹۲٤ جی. سی. اوانس (Eveance .G. C) در مقاله‌ای تحت‌عنوان پویایی یک انحصارگر از برنامه‌ریزی پویا در اقتصاد استفاده کرد (پورکاظمی، ۱۳۹۳: ۳۳-۳۷). از دهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ برنامه‌ریزی پویا و کنترل بهینه تعریف و مسائل فوق حالت خاصی از آن لحاظ شد که به تعریف آن می‌پردازیم.

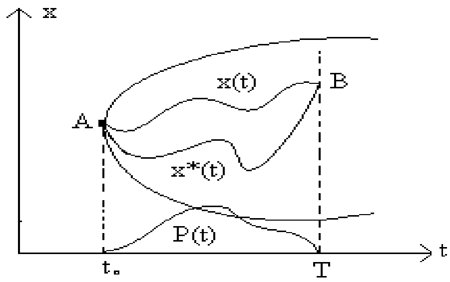
۰-۲). تعریف صوری برنامه‌ریزی پویا

در برنامه‌ریزی پویا از عوامل زیر استفاده می‌کنیم:

متغیر زمان را که به t نشان می‌دهیم به‌طور پیوسته در فاصله $t_0 \le t \le T$ تغییر می‌کند t_0 زمان اولیه، T زمان انتهایی (Terminal Time) است.

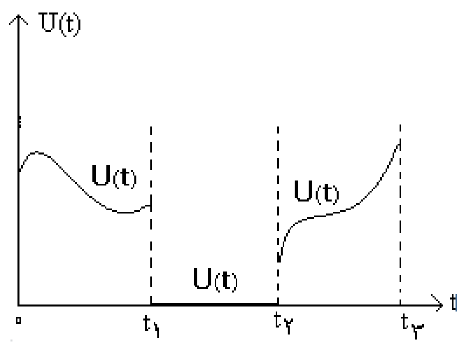
متغیر وضعیت (State Variable)، **یا حالت**، را به $x_i(t)$ نشان داده که تابعی پیوسته از زمان است. متغیر وضعیت X $X(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$ به یک فضای ممکن مانند S تعلق دارد $X \mathcal{E} SS \subseteq \mathbb{R}^n$, در شکل (۲) متغیر وضعیت یک‌بعدی فضای ممکن سهمی و دو مسیر زمانی $x(t)$ رسم شده است.

شکل (۲)



متغیر کنترل (Control Variable): متغیری‌ست که به‌وسیله آن بر متغیر وضعیت اثر می‌گذارد، این متغیر را به $U(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t))$ نشان داده و $U(t)\in\mathbb{R}^m$. اگر متغیر کنترل $U(t)\varepsilon\mathbb{R}$ باشد، به‌صورت تکه‌ای پیوسته است شکل (۳)را ملاحظه کنید. متغیر کنترل اگر تابعی از زمان باشد، آن را کنترل باز و اگر تابع از زمان و متغیر وضعیت باشد آن را متغیر بسته گویند (اینترلیگیتور، ۱۳۸۶: ۱۸۸).

شکل (۳)



متغیر کنترل نیز، به یک فضای ممکن مانند $B\subset\mathbb{R}^m$ تعلق دارد.

معادله حرکت (Motion Equation): رابطه بین متغیر وضعیت و متغیر کنترل است،

$$\dot{X}(t)=f(t,U(t),X(t))$$

$\dot{X}(t)$ مشتق بردار $X(t)$ برحسب t است. توجه شود رابطه فوق یک دستگاه n معادله دیفرانسیل است.

تابعی هدف (Objective Functional): در مسئله کنترل تابعی هدف به‌صورت زیر است:

$$Max \text{ یا } Min[U(t)] = \int_{t_0}^{T} I(t,X(t),U(t))dt + F(X(T),T)$$

انتگرالده، I تابع میانی و تابع F موسوم به تابع انتهایی است.

مسئله برنامه‌ریزی پویا یا کنترل بهینه: عبارت از تعیین متغیر کنترل بهینه $U^*(t)$ و به‌واسطه آن تعیین متغیر وضعیت بهینه $X^*(t)$ است تا تابعی هدف نسبت به معادله حرکت، بیشینه یا کمینه باشد، یعنی داریم:

$$Max \text{ یا } Min V[U(t)] = \int_{t_0}^{T} I(t,X(t),U(t))dt + F(X(T),T).$$

$$\text{s.t } \dot{X}(t)=f(t,U(t),X(t)) \quad (۲)$$

در این مسئله $X(t_0)$، $X(T)$، T و فضای ممکن متغیر کنترل و برخی از قیود مفروض باشد. مسئله (۲) را مسئله کنترل بولزا (Bolza) نامند.

مسائل قدیمی که تا دهه ۱۹۵۰ بحثی از متغیر کنترل نبود به‌صورت زیر است:

$$Max \text{ یا } Min V(t) = \int_{t_0}^{T} I\left(t,X(t),\dot{X}(t)\right) dt \quad (۳)$$

این مسئله را کنترل لاگرانژ نامیدند (پورکاظمی، ۱۳۹۳: ۳۲-۲۸).

۱) روش حساب تغییرات

قدیمی‌ترین روش حل مسئله (۳) روش حساب تغییرات است. x(t) متغیر وضعیت، یک‌بعدی به‌صورت زیر است:

$$Max \text{ یا } Min V(t) = \int_{t_0}^{T} I\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

$$x(t_0) = A \text{ و } x(T)=B$$

تابع I نسبت به t ، x و $\dot{x}$ مشتق‌پذیر فرض کرده، در شکل *(۲)* بی‌نهایت مسیر بین A و B می‌توان رسم کرد، می‌خواهیم *(t)*x* مسیر بهینه را چنان تعیین کنیم تا تابعی (۳) ماکزیمم یا مینیمم باشد. این مسیر بهبنه از قضیه زیر به‌دست می‌آید.

۱-۱) قضیه، شرط لازم مرتبه اول اویلر

اگر *(t)*x* تابعی باشد از فضای ممکن A به‌طوری‌که تابعی (۳) را ماکزیمم یا مینیمم کند و انتگرالده I نسبت به متغیرها مشتق‌پذیر باشد، آنگاه لازم می‌آید *(t)*x* در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند:

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \qquad (٤)$$

این معادله موسوم به معادله اویلر (Leonard Euler) و معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. از حل این معادله دیفرانسیل مسیر بهینه *(t)*x* با دو ثابت دلخواه به‌دست می‌آید، این مسیر بهینه از نقاط A و B می‌گذرد، به کمک این نقاط، ثابت‌های دلخواه مسیر بهینه به‌دست می‌آید (همان: ٤٧-٥٢):

۲-۱) قضیه شرط لازم مرتبه دوم لژاندر (Adrien-Marie Legendre):

از انتگرا لده $I\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)$ برای مشتق مرتبه دوم آن نسبت به $\dot{x}(t)$، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2} I(x^{*})}{\partial \dot{x}^{2}} \geq 0 & \Rightarrow Min.Path \\ \dfrac{\partial^{2} I(x^{*})}{\partial \dot{x}^{2}} \leq 0 & \Rightarrow Max.Path \end{cases} \qquad (٥)$$

۳-۱) قضیه شرط کافی: در مسئله برنامه‌ریزی پویای

$$Max.orMin.V(t) = \int_{t_0}^{T} I\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

شرط لازم اویلر شرط کافی نیز هست، اگر انتگرالده $I\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)$ نسبت به دو متغیر x و $\dot{x}$ برای حالت بیشینه مقعر و برای حالت کمینه محدب باشد.

به کمک ماتریس هشین این تابع این تحدب و تقعر تعیین می‌شود داریم:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{2} I}{\partial x^{2}} & \dfrac{\partial^{2} I}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \dfrac{\partial^{2} I}{\partial \dot{x} \partial x} & \dfrac{\partial^{2} I}{\partial \dot{x}^{2}} \end{pmatrix}$$

(٦)

$$\begin{cases} |\boldsymbol{H}_1| > 0 \quad |\boldsymbol{H}_2| > 0 & \Rightarrow Strictiy, Convex \Rightarrow Min.Path \\ |\boldsymbol{H}_1| < 0 \quad |\boldsymbol{H}_2| > 0 & \Rightarrow Strictiy, Concave \Rightarrow Max.Path \end{cases}$$

(همان: ٩٦-١٠٠).

٤-١) دو تعمیم از مسئله حساب تغییرات

اگر در تابع زیر علامت انتگرال مشتقات مراتب بالاتر نیز وجود داشته باشد، مثلاً تابعی هدف دارای مشتق مرتبه دوم نیز باشد، یعنی:

$$V[x] = \int^{T} I(t, x, \dot{x}, \ddot{x})dt$$

(٧)

به‌جای رابطه اویلر (٤) ثابت می‌شودکه باید از معادله اویلر-پواسون به‌صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \ddot{x}^2}\right) = 0 \qquad (٨)$$

حالت دوم، اگر n متغیر وضعیت داشته باشیم، داریم:

(۹)

$$Max\ \&Min\int_{t_0}^{T} I(t,x_1,x_2,...,x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,...,\dot{x}_n)dt$$

تابعی فوق دارای n متغیر وضعیت است در این صورت شرط لازم برای وجود مسیر بهینه، n معادله اویلر به صورت زیر است:

(۱۰)

$$\frac{\partial I}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i}\right)=0 \quad i=1,2,...,n$$

از دستگاه n معادله دیفرانسیل n مجهولی فوق n مسیر بهینه متغیرهای وضعیت تعیین می‌شود. شرط لازم فوق کافیست اگر تابع $I(t,x_1,x_2,.....x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,...\dot{x}_n)$ نسبت به متغیرهای x_i و $\dot{x}_i$، $i=1,2,...,n$ برای بیشینه مقعر و برای مینیمم محدب باشد (همان: ۷۰-۷۶).

۵-۱) مسائل مقید[1] در حساب تغییرات:

در برنامه‌ریزی پویا با قیود مساوی، نامعادله‌ای از نوع توابع معمولی و معادلات دیفرانسیل و همچنین قیود انتگرالی مواجه هستیم.

۱-۵-۱) قیود معادله‌ای

مسئله برنامه‌ریزی پویای زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱۱)

$$Max\ \&MinV=\int_{t_0}^{T} I(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)dt$$
$$s.t.g(t,x_1x_2)=c$$

با محاسبه $x_2=h(t,x_1)$ از قید، در تابعی (۱۱) مقدار می‌گذاریم، مسئله به حالت یک‌متغیره بدل می‌شود:

$$Max\&MinV=\int_{t_0}^{T} I_1(t,x_1,\dot{x}_1)dt$$

این روش جایگذاری نام دارد.

روش دوم استفاده از تابع لاگرانژ همانند برنامه‌ریزی ایستا است، داریم:

(۱۲)

$$L=I(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)+\lambda(t)\,[c-g(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)]$$

$\lambda(t)$، ضریب لاگرانژ تابعی از t است. از روابط زیر، که موسوم به معادله اویلر -لاگرانژ است، استفاده می‌کنیم: شرط لازم مرتبه اول

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial x_2}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)=[c-g(t,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)]=0\end{cases}$$

از دستگاه فوق مسیرهای بهینه $\lambda^*(t)$ و $x_2^*(t)$ و $x_1^*(t)$ تعیین می‌شود (همان: ۱۷۹-۱۸۲).

۲-۵-۱) قیود نامعادله‌ای

در مسئله زیر قیود به‌صورت نامعادله‌ای است:

(۱۳)

$$MaxV(t)=\int_{t_0}^{T} I\left(t,X(t),\dot{X}(t)\right)dt$$
$$s.t\ G_{m\times 1}(t,X,\dot{X})\le C_{m\times 1}$$

[1]- Constrained problems

که در آن $X=(x_1,x_2,...x_n)$ تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم. داریم،

$$L = I(t,X,\dot{X}) + \lambda[C - G(t,X,\dot{X})]$$

معادله اویلر- لاگرانژ به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{X}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{X}}}\right) = 0 \qquad (۱۴)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}}\right) = C - G(t,\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}}) \geq 0$$

همانند شرایط کان تاکر داریم:

$$\lambda[C - G(t,X,\dot{X})] = 0$$

از m رابطه آخر، یا قید به‌صـــورت معادله، و جواب بر روی قید است و یا $\lambda_i = 0$ است یعنی جواب داخلی و روی قید نیســـت. از این دســـتگاه مقادیر بهینه $X^*(t),\lambda^*(t)$ تعیین می‌شود.

۳-۵-۱) قیود انتگرالی

مسئله به‌صورت زیر است:

(۱۵)

$$Maxv = \int_t^T I\,(t,x,\dot{x})dt$$

$$\int_t^T G(t,x,\dot{x})dt = l$$

ثابت می‌شود در تابع لاگرانژ، به‌صورت زیر λ ثابت است،

(۱۶)

$$L = I(t,x,\dot{x}) - \lambda G(t,x,\dot{x})$$

M

حال معادله اویلر ـ لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم، داریم؛

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x} - \lambda\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} - \lambda\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

از این معادله دیفرانسیل با توجه به ثابت بودن λ مسیر بهینه x^* را تعیین می‌کنیم. با توجه به شـــرایط اولیه ثابت‌های *جواب* و همچنین با توجه به قید انتگرالی، ثابت λ را تعیین می‌کنیم (همان: ۱۸۷-۱۹۲).

۱-۶) شرایط تقاطع (Transversality Conditions)

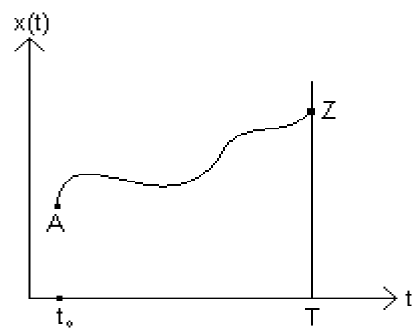
در مثال‌های بالا مقدار x(T) و زمان انتهایی T مفروض بود. اهمیت مســـئله برنامه‌ریزی پویا آن اســـت که می‌توان مقادیر بهینه این دو را از روابط زیر، که مو سوم به شرایط تقاطع یا تراگردی است، به‌دست آورد. در مسئله برنامه‌ریزی پویا (۳) داشتیم:

$$Max \text{ یا } MinV(t) = \int_{t_0}^{T} I(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$

حال فرض کنیم نقطه شـــروع ثابت یعنی $x(t_0) = x_0$، و حالات زیر وجود دارد:

حالت اول: T داده شـــده و $x(T)$ آزاد باشـــد، مســـئله را برنامه‌ریزی عمودی نامند، شکل (۵) ثابت می‌شود،

شکل(۵)



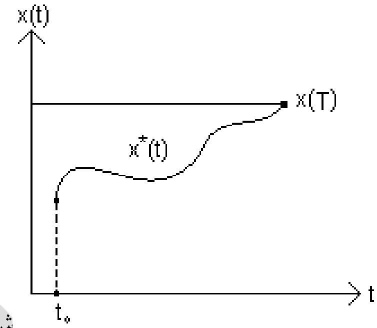
اول اینکه: رابطه اویلر برقرار است.

دوم اینکه: رابطه زیر که مو سوم به شرط تقاطع ا ست باید برقرار باشد:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{T^*} = 0 \qquad (۱۷)$$

حالت دوم: T آزاد و $x(T)$ داده شده باشد. مسئله را برنامه‌ریزی افقی نامند، شکل (۶) را ملاحظه کنید. شرط تقاطع به‌صورت زیر است:

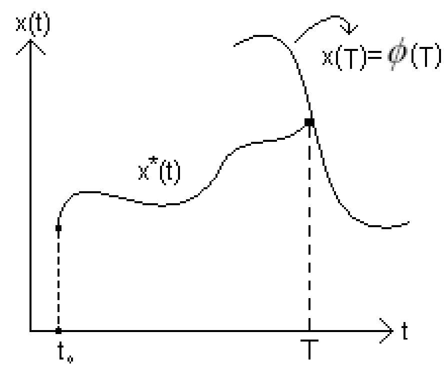
$$I - \dot{x}(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}})\Big|_{T^*} = 0 \qquad (۱۸)$$



شکل (۶)

حالت سوم: می‌خواهیم نقطه انتهایی بر روی منحنی $x(T) = \phi(T)$ مانند شکل (۷) که موسوم به منحنی انتهایی است، باشد.

شکل (۷)



شرط تقاطع به‌صورت زیر است.

$$\boldsymbol{I + (\dot{\varphi} - \dot{x})I_{\dot{x}}|_T = 0}$$

حالت چهارم: T مفروض $x(t) \ge x_{\min}$

در این حالت چون T مفروض است از شرط تقاطع (۱۷) استفاده می‌کنیم:

$$(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}})\Big|_{T^*} = 0$$

از این رابطه x^* به‌دست می‌آید. اگر داشته باشیم $x^* \ge x_{\min}$ به مقصود رسیده‌ایم، درغیراین‌صورت $x^* = x_{\min}$ قرار داده، مانند حالت نقطه انتهایی ثابت ضرایب را به‌دست می‌آوریم.

حالت پنجم: $x(T)$ داده شده و $T \le a$

در این حالت $x(T)$ مفروض است. از حالت دوم استفاده می‌کنیم و شرط تقاطع (۱۸) را به‌کار می‌گیریم:

$$I - \dot{x}(\frac{\partial I}{\partial \dot{x}})\Big|_{T^*} = 0$$

از این شرط تقاطع T^* به‌دست می‌آید، اگر $T^* \le a$ بود که جواب موردقبول است. اگر $T^* > a$ به‌دست آمد دراین‌صورت $T^* = a\ ,\ x(T^*)$ استفاده می‌شود.

حالت ششم: ممکن است Tو $x(T)$ هردو آزاد باشند، دراین‌صورت شرایط تقاطع روابط (۱۷) و(۱۸) است که باید توأماً برقرار باشند (همان: ۱۲۳-۱۳۳).

نکته: به‌کمک شرایط اولیه و شرط تقاطع ثابت‌های مسیر بهینه محاسبه می‌شود.

۵- نظریه کنترل بهینه (Optimal control theory):

مسئله کنترل، گسترش مدرن، حساب تغییرات است، در دهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۵ ریاضیدان نابینای روسی، پونتری اگین (Lev SemenovichPontryagin)، شرایط لازم اصل ماکزیم را ارائه داد. برای روشن شدن موضوع به مسئله زیر توجه شود.

از یک منبع نفت با ذخیره S_0 با نرخ $E(t)$ استخراج می‌کنیم. میزان ذخیره منبع در هر لحظه از زمان $S(t)$است. نرخ استخراج E(t) بر میزان ذخیره $S(t)$ اثر می‌گذارد.

می‌توان $S(t)$ را متغیر وضعیت و $E(t)$، متغیر کنترل است. بین این دو رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{dS}{dt} = -E(t) \Leftrightarrow \dot{S} = -E(t)$$

این رابطه موسوم به معادله حرکت است. اگر قیمت هر بشکه نفت در هر لحظه در بازار بورس $P(t)$، و هزینه در هر لحظه تابعی به صورت $C(t, S(t), E(t))$، حال مسئله این است که با چه نرخی از این معدن استخراج کنیم و میزان ذخیره در هر لحظه چه مقدار است، تا سود ارزش فعلی استخراج از این منبع در فاصله $[\circ, T]$ بیشینه شود؟ اگر سود سرمایه‌گذاری ρ باشد ارزش فعلی تابعی سود به‌صورت زیر است:

(۱۹)

$$\max \pi = \int_{\circ}^{T} [p(t).E(t) - C(t, S(t), E(t)] e^{-\rho t} dt$$

$$\dot{S} = -E(t)$$

$$S(\circ) = S_{\circ}$$

$S_{\circ}, T$ مفروض‌اند، $S(T)$ آزاد.

مسئله فوق شبیه مسئله Bolza (۲) است. (برای نمونه‌های دیگر در این زمینه ن.ک. Seedeater, Further Mathematics for Economics Analysis, 2008) ببینید.

۱-۲) اصل ماکزیمم (The Maximum principle) **پونتری اگین**

مسئله (۲) که یک متغیر و ضعیت و یک متغیر کنترل دارد را در نظر می‌گیریم:

$$.. Max V[U(t)] = \int_{t_0}^{T} I(t, x(t), u(t)) dt$$

$$\text{s.t} \dot{x}(t) = f(t, u(t), x(t)) \qquad (۲۰).$$

مفروض $x(t_{\circ}) = x_{\circ}$ و T، آزاد $x(T)$=

$u(t) \in B \subset R$ و $t \in (t_{\circ}, T)$

برای به‌دست آوردن مسیرهای بهینه $u^*(t)$ و $x^*(t)$ از فضاهای ممکن از قضیه زیر استفاده می‌شود.

۱-۱-۲) قضیه شرط لازم اصل ماکزیمم:

تابع هامیلتون (Hamiltonian) را به‌صورت زیر تشکیل داده:

$$\max_{u} H = I(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, x(t), u(t)) \quad (۲۱)$$

$\lambda(t)$ را متغیر هم‌وضعیت (Costate Variable) یا الحاقی می‌خوانند. اگر $u^*(t)$ و $x^*(t)$ و $\lambda^*(t)$ مسیر بهینه باشند که مسئله کنترل (۲۰) را بیشینه کند، دراین صورت شرایط زیر برقرار است:

اول اینکه، تابع‌ها میلتون H نسبت به u ماکزیمم است، داریم:

$$۱) \max_{u} H \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = \circ \qquad (۲۲-۱)$$

شرط ماکزیمم بودن H نسبت به u: $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq \circ$.

دوم اینکه، شرط دوم به‌صورت زیر است که از آن معادله حرکت به‌دست می‌آید:

(۲۲-۲)

$$۲) \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(t, u(t), x(t))$$

سوم اینکه، شرط سوم به‌صورت زیراست:

$$۳) \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \qquad (۲۲-۳)$$

از سه معادله (۲۲) معادله اول جبری و معادلات دوم و سوم معادلات دیفرانسیل معمولی‌اند، مسیرهای بهینه $u^*(t)$، $x^*(t)$، $\lambda^*(t)$ به‌دست می‌آید. با توجه به مفروض بودن $x(\circ)$، T، $x(T)$ ضرایب ثابت مسیرهای فوق تعیین می‌شود.

نکته ۱: مسئله کنترل(۲۰) همواره باید به‌صورت ماکزیمم باشد، اگر مسئله به‌صورت کمینه باشد کافیست در منفی آن را ضرب تا به‌صورت بیشینه درآید.

نکته۲: اگر تابع هامیلتون نسبت به متغیر کنترل u، خطی باشد، جواب بهینه،u ابتدا یا انتها خواهد بود.

۲-۲) شرایط تقاطع:

این شرایط در اصل ماکزیمم به‌صورت زیر ثابت می‌شود:

(۲۳) $\lambda(T)=0 \Rightarrow$ اگر T مفروض و $x(T)$ آزاد باشد

$H(T)=0 \Rightarrow$ اگر x(T) مفروض و T آزاد باشد

$H-\lambda\varphi'(t)|_T=0 \Rightarrow$ اگر منحنی انتهایی $x_T=\varphi(T)$ باشد

اثبات قضایای فوق به روش‌های مختلف ممکن است. (همان:۲۵۰–۲٦٦)

۲-۲-۲) شرایط کافی در مسئله کنترل

شرط کافی: قضیه او- ال منگازرین (O. L. Mangazerian)

شرط لازم اصل ماکزیمم در مسئله (۲۰) برای ماکزیمم مطلق تابعی V کافی است، اگر توابع f,F مشتق‌پذیر و نسبت به (x,u) مقعر بوده در ثانی برای $t\in[0,T]$, $\lambda(t)\ge 0$.

اگر f نسبت به x,u خطی باشد، علامت $\lambda(t)$ می تواند منفی نیز باشد، قضیه صادق است.

شرط کافی اَرو (J. K. Arrow):

اگر از معادله اول اصل ماکزیمم $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ مقدار u^* را به‌دست آوریم به‌طوری که:

$$u^*=u(t,x,\lambda)$$

با جایگذاری در تابع هامیلتون داشته باشیم:

(۲٤)

$$H^0=I(t,x,u^*)+\lambda f(t,x,u^*)=H^0(t,x.,\lambda)$$

ارو ثابت می‌کند اگر H^0 به‌ازای جمیع مقادیر $t\in[t_0,T]$ نسبت به x مقعر باشد، آنگاه شرط لازم اصل ماکزیمم، نیز کافی خواهد بود H^0 را ماکزیمم $H(t,x,u)$ نسبت به u می‌خوانیم (همان: ۲٦٦–۲۷۲).

۲-۳) چند متغییر کنترل و وضعیت

فرض می‌کنیم در مسئله کنترل متغیر وضعیت دارای n مؤلفه و متغیر کنترل دارای m مؤلفه به صورت‌های.

$$U(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t))$$

$X(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ تابعی هدف و n معادله حرکت به‌صورت زیر است:

$$MaxV=\int_{t_0}^{T} I(t,X(t),U(t))dt$$

$$s.t:\begin{cases}\dot{x}_1(t)=f_1(t,X(t),U(t))\\ \dot{x}_2(t)=f_2(t,X(t),U(t))\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)=f_n(t,X(t),U(t))\end{cases} \quad (۲۵)$$

شرایط اولیه:

$x_i(t_0)=x_{i0}$ $\quad i=1$ تا n

شرایط انتهایی به صورت‌های مختلف زیر است:

الف) $x_i(T)=x_{Ti}$ $\quad i=1$ تا ℓ

ب) $x_i(T)\ge \bar{x}_{Ti}$ $\quad i=\ell+1$ تا k

ج) $x_i(T)$ آزاد $\quad i=k+1$ تا n

معادله هامیلتون را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$H=I(t,X,U)+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots+\lambda_n f_n \quad (۲٦)$$

در تابع هامیلتون n متغیر هم‌وضعیت $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ وجود دارد.

۱) تابع هامیلتون (۲٦) باید نسبت به $U(t)$ بیشینه باشد، پس داریم:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \circ \qquad i = ۱ \text{ تا } m$$

$$\frac{\partial^۲ H}{\partial U^۲} \le \circ ،$$

رابطه دوم اصل ماکزیمم به‌صورت زیر است که n معادله حرکت را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \dot{x}_i \qquad i = ۱ \text{ تا } n$$

رابطه سوم اصل ماکزیمم به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{\lambda}_i \qquad i = ۱ \text{ تا } n$$

از رابطه سوم نیز n معادله به‌دست می‌آید. روابط سه‌گانه اصل ماکزیمم مشتمل بر $۲n + m$ معادله است و از آن‌ها m متغیر کنترل u_i^* و n متغیر x_i^* و n متغیر λ_i^* به‌دست می‌آید. $X(t_\circ)$ داده شده است، لذا با داشتن $t_\circ$ و n مقدار $\mathrm{x_i(t_\circ)}$، n رابطه برحسب ثابت‌های موجود در مسیرها را به‌دست دهد. شرایط انتهایی به‌صورت‌های زیرند:

الف) اگر $X(T)$ مفروض و T معلوم باشد، ثابت‌های موجود مسیرها به‌دست می‌آید.

ب) اگر T آزاد و $X(T)$ مفروض باشد؛ شرط تقاطع برابرست:

$$H\,|_T = \circ$$

ج) اگر T داده شده و $X(T)$ آزاد باشد، از شرایط تقاطع داریم:

$$\lambda(T) = \lambda_۱(T) = \lambda_۲(T) = \cdots = \lambda_n(T) = \circ$$

د) اگر $x_i = \phi_i(T)$ منحنی انتهایی باشد، از شرط تقاطع داریم:

$$(H - \lambda_i \phi_i')\,|_T = \circ$$

برای حالاتی که $x_i(T) \ge x_{Ti}$ باشد، شرایط تقاطع به‌صورت زیر است:

$$[x_i(T) - x_{Ti}]\lambda_i(T) = \circ$$

با استفاده از روابط فوق ثابت‌های مسیرهای بهینه $U^*(t)$، $X^*(t)$ و $\lambda^*(t)$ به‌دست می‌آید (همان: ۳۰۶-۳۱۲).

۲-٤) تابع هامیلتون جاری (The current valve Hamiltonian):

اگر تابع میانی دارای ضریب ارزش فعلی $e^{-\rho t}$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$Max\, V = \int_\circ^T I(t,x,u)e^{-\rho t}dt \qquad (۲۷)$$

$$s.\,t.\ \dot{x} = f(t,x,u) \text{ ، و سایر شرایط}$$

می‌توان با حذف $e^{-\rho t}$ که عبارتی مثبت است فرمول‌های اصل ماکزیمم را به‌صورت ساده‌تری به‌دست آورد. تابع هامیلتون برابر است با:

$$H = I(t,x,u)e^{-\rho t} + \lambda f(t,x,u)$$

اما فرض می‌کنیم، $\lambda = me^{-\rho t}$، در H مقدار می‌گذاریم،

$$H = [I(t,x,u) + mf(t,x,u)]e^{-\rho t}$$

داخل کروشه را به H_c نشان داده و آن را هامیلتون جاری می‌نامیم. داریم:

$$H_c = I(t,x,u) + mf(t,x,u) \qquad (۲۸)$$

دراین صورت ثابت می شود روابط ا صل ماکزیمم به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \underset{u}{Max}\ H_c \Rightarrow \dfrac{\partial H_c}{\partial u}=0 \\ \dfrac{\partial H_c}{\partial m}=\dot{x} \\ \dfrac{\partial H_c}{\partial x}=-\dot{m}+\rho m \end{cases} \qquad (۲۹)$$

ثابت می‌شود، شرایط تقاطع به‌صورت زیر است:

$m(T)=0 \Rightarrow$ آزاد $x(T)$، T مفروض

$H_c|_T=0 \Rightarrow$ آزاد T ، $x(T)$ مفروض

(۳۰) $x_T=\phi(T) \Rightarrow H_c-m\phi'|_T=0$ منحنی انتهایی

$(T-T_{\max})H_c|_T=0$ ، $T<T_{\max}$ اگر

$(x(T)-x_{\min})m|_T=0$ ، $x(T)\le x_{\min}$ اگر

۲-۵) مسائل کنترل مقید:

مسئله کنترل افزون‌بر معادله حرکت ممکن است دارای قیودی نیز با شد. این قیود به صورت معادله‌ای، نامعادله‌ای و انتگرالی است.

قیود معادله‌ای و نامعادله‌ای:

مسئله کنترل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Max\,V=\int_0^T I(t,X(t),U(t))dt$$

$$\dot{x}=f(t,X(t),U(t)) \quad (۳۱)$$

شرایط مرزی $G_{s\times1}(t,X(t),U(t))=C_{s\times1}$

برای سادگی مسئله‌ای با دو متغییر کنترل u_1 و u_2 و یک قید در نظر می‌گیریم، داریم:

$$Max\,V=\int_0^T I(t,x(t),u_1(t),u_2(t))dt$$

$$\text{s. t. } \dot{x}=f(t,x(t),u_1(t),u_2(t))$$

$$g(t,x(t),u_1(t),u_2(t))=C$$

تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

(۳۲)

$$L=I(t,x,u_1,u_2)+\lambda(t)f(t,x,u_1,u_2)+P(t)[C-g(t,x,u_1,u_2)]$$

که در آن $P(t)$ ضریب لاگرانژ است. سه رابطه اصل ماکزیمم را می‌نویسیم، داریم:

اگر u_1 و u_2 جواب‌های داخلی باشد، دراین‌صورت تابع لاگرانژ نسبت به U_1 و U_2 ماکزیمم باشد،

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_1}&=0 \\ \frac{\partial L}{\partial u_2}&=0 \end{aligned} \qquad \forall t\in[0,T],\ \frac{\partial^2 L}{\partial U^2}\le 0$$

روابط دوم و سوم اصل ماکزیمم را می‌نویسیم، داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\dot{x} \Rightarrow \dot{x}=f(t,x,u_1,u_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\dot{\lambda}$$

افزون‌بر روابط اصل ماکزیمم، مشتق نسبت به $p(t)$ ضریب لاگرانژ تابع قید را به‌دست می‌دهد.

$$\frac{\partial L}{\partial P}=0 \Rightarrow g(t,x,u_1,u_2)=C$$

از پنج معادله فوق مسیرهای بهینه $x^*(t)$، $u_1^*(t)$، $u_2^*(t)$، $\lambda^*(t)$ و $p^*(t)$ به‌دست می‌آید.

اگر قید به صورت $g(t,x,u_1,u_2)\le c$ باشد دراین صورت رابطه فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial L}{\partial P}\ge 0 \quad , \quad P[C-g]=0 \qquad (۳۳)$$

به‌طور کلی، اگر قید به‌صورت کلی $C - g(t, X(t), U(t)) \geq \circ$ باشد، دراین‌صورت محدودیتی در مورد متغیرهای کنترل وجود ندارد.

قید انتگرالی:

مسئله به‌صورت زیر است:

$$Max\, V = \int_{\circ}^{T} I(t, x, u)dt$$
$$\dot{x} = f(t, x, u) \qquad (۳٤)$$
$$\int_{\circ}^{T} G(t, x, u)dt = k \qquad (k \text{ مفروض})$$
$$x(\circ) = x_{\circ} \quad \text{و} \quad x(T) = \text{آزاد} \ (x_{\circ} \text{ و } T \text{ مفروض‌اند})$$

تابع لاگرانژ را به صورتی که در آن ضریب لاگرانژ μ ثابت بوده تشکیل می‌دهیم:

$$H = I(t, x, u) + \lambda(t)f(t, x, u) - \mu G(t, x, u)$$

شرایط اصل ماکزیمم را نوشته، مقادیر بهینه را تعیین می‌کنیم.

شرط کافی:

اگر مسئله دارای توابع I و F و g و یا قید انتگرالی با تابع زیرعلامت انتگرال G باشد، به‌طوری که

$$H = I + \lambda f - \mu G \Rightarrow L = H + p[c - g]$$

I نسبت به x و u مقعر است.

λf نسبت به x و u مقعر است. $\forall t \in [\circ, T]$

μG نسبت به x و u محدب است. (۳۵)

pg نسبت به x و u محدب است.

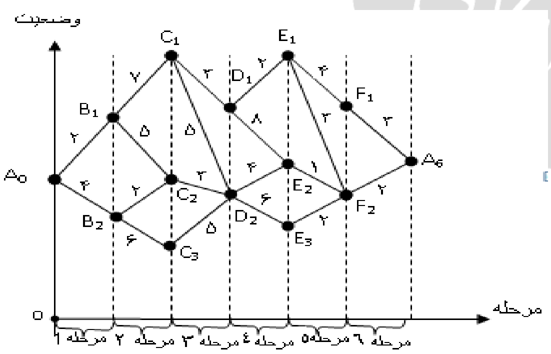
دراین‌صورت مسیرهای بهینه تابع هدف را بیشینه می‌کند.

۳)برنامه‌ریزی پویا

ریچارد بلمن[۲] آمریکائی برای اولین‌بار اصطلاح برنامه‌ریزی پویا را در دهه ۱۹٤۰ برای حل مسئله تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای به‌کار برد. برای آشنایی با این مسئله به مثال زیر که موسوم به مسئله دلیجان است توجه کنید.

فرض کنید، فروشنده‌ای کالایی را از مبدأ $A_{\circ}$ در مسیر شش شهر (مرحله)[۳] حرکت تا به مقصد $A_{۶}$ بر سد. در هر شهر مسیرهای مختلفی وجود دارد، سود به میلیون تومان در هر مسیر انتخابی در شکل نشان داده شده است. از میان این مسیرها کدام مسیر را انتخاب کند تا سود فروشنده در مقصد ماکزیمم شود. این مسئله در ادبیات پژوهش عملیاتی موسوم به برنامه‌ریزی پویا نیز هست.

شکل (۱۰)



ریچارد بلمن با تعمیم این مسئله در سال ۱۹۵۳ با بیان اصل بهینگی روش برنامه‌ریزی پویا را برای حل مسئله کنترل بولزا ارائه داد. برای استفاده از این روش، آشنایی با حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ضروریست (همان: ٤۳۷-٤٦۰).

۱-۳) معادله بلمن

مسئله کنترل زیررا در نظر می‌گیریم:

- Richard Bellman(1920-1984)[۲]

[۳]- Stage

$$\underset{u}{Max}Z = \int_{t_\circ}^{T} I(t,x,u)dt + F(T,x(T)) \quad (۳۶)$$
$$s.t \quad \dot{x} = f(t,x,u)$$
$$x(t_\circ) = x_\circ$$

اصل اساسی برنامه‌ریزی پویا موسوم به اصل بهینگی (Principle of Optimality) است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

یک مسیر بهینه دارای این خاصیت است که اگر هر نقطه دیگر مسیر را به‌عنوان نقطه اولیه در نظر بگیریم، مسیر باقیمانده نیز با توجه به انتخاب این نقطه به‌عنوان نقطه اولیه، مسیر بهینه است. برای مثال، می‌دانیم کمترین فاصله نقطه A از خط D طول عمود AH است. حال اگر هر نقطه‌ای از خط عمود AH ، مانند B، را در نظر بگیریم که بر روی این خط عمود یعنی BH کوتاه‌ترین فاصله است. بلمن تابع هدف را در نظر گرفته، مسیر بهینه را با نقطه $(t_\circ, x_\circ)$ شروع می‌کند، از اصل فوق استفاده کرده و نقطه $(t_\circ + \Delta t, x_\circ + \Delta x)$ را روی مسیر بهینه به‌عنوان نقطه شروع انتخاب، با این ابتکار و عملیات ریاضی به معادله بلمن رسید (همان: ۳۷۵–۳۷۸). این معادله به‌صورت زیر است:

$$-\frac{\partial z}{\partial t} = \underset{u}{Max}\left[I(t,x,u) + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot f(t,x,u) \right] \quad (۳۷)$$

رابطه فوق موسوم به معادله بلمن است.

روش استفاده از معادله بلمن:

در روش حساب تغییرات برای پیدا کردن مسیر بهینه از معادله اویلر استفاده کرده، متغیر وضعیت x^* را به‌دست می‌آوریم. در روش اصل ماکزیمم تابع هامیلتون را نوشته و با به‌کارگیری معادلات اصل ماکزیمم مسیرهای بهینه u^* و x^* و λ^* را محاسبه می‌کنیم.

در روش برنامه‌ریزی پویا در معادله بلمن به جای I,f از صورت مسئله مقدار قرار داده و از آن u را چنان تعیین می‌کنیم که این معادله ماکزیمم باشد یعنی نسبت به u مشتق جزئی می‌گیریم (شرط لازم مرتبه اول)، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial u} I(t,x,u) + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,u) = ۰ \quad (۳۸)$$

از این معادله مقدار u برحسب t ، x و z_x، از شرط لازم مرتبه اول محاسبه می‌شود و ماکزیمم بودن نسبت به u را کنترل می‌کنیم. سپس به‌جای u مجدداً در رابطه (۳۷) مقدار قرار داده به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌رسیم، از حل این معادله z^* محاسبه می‌شود در رابطه u که قبلاً به‌دست آمده بود به‌جای z^* مقدار قرار داده از معادله اخیر و معادله حرکت مسیرهای بهینه u^* و x^* به‌دست می‌آید (همان: ۳۷۷–۳۸۱).

۲–۳)مسئله خودگردان افق نامحدود:

در مسئله کنترل بهینه خودگردان توابع I و f فاقد متغیر t و چون افق برنامه‌ریزی نامحدود است، زمان تا بی‌نهایت بوده و به‌صورت زیر است:

$$\underset{u}{Max}z = \int_{\circ}^{\infty} e^{-rt} I(x,u)dt \quad (۳۹)$$
$$s.t \quad \dot{x} = f(x,u) \; x(t_\circ) = x_\circ$$

ثابت می‌شود، معادله بلمن (۳۷) به‌صورت زیر (همان: ۳۹۱–۳۹۲) در می‌آید:

$$-rV(x) = \underset{u}{Max}\left[I(x,u) + V'(x) \cdot f(x,u) \right] \quad (۴۰)$$

اگر توجه شود معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی است، لذا حل آن ساده‌تر است (Kamien Morton, 2012).

نکته ۱: از معادله بلمن می‌توان به معادله اویلر در حساب تغییرات و معادلات اصل ماکزیمم رسید.

کتاب‌شناسی

اینتریلیگیتور، مایکل دی. (۱۳۸۶). *بهینه‌سازی ریاضی*، ترجمه محمدحسین پورکاظمی، چاپ دوم، تهران: دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۳). *بهینه سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن*، تهران: دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۸۹). *معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن در مهندسی، علوم و اقتصاد*، تهران: نشر نی.

چیانگ، آلفا، سی، (۱۳۸۷). *اصول بهینه‌سازی پویا*، ترجمه *عباس شاکری و فریدون اهرابی*، تهران: دانشگاه علامه طباطبائی.

Chiang, C, Alpha. (2000). *Elements of Dynamic Optimization*, Waveland Press.

Evance G. C. (1924). “The Dynamic of Monopoly”, *American Mathematical Month February*, pp. 77-83.

Kamien Morton I. , Schwart Nancy L (2012). Dynamic Optimization, Second Edition: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Deover Publication.

Seedeater, K. Hammond, P. , Seierstad, A. Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economics Analysis*, (2nd Ed.) Prentice Hall.

محمدحسین پورکاظمی

عضو هیئت‌علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی