بهینه‌سازی ایستا

Mathematical optimization

۰) مقدمه:

بهینه‌سازی ایستا یا برنامه‌ریزی ریاضی انتخاب بهترین مقدار از یک مجموعه داده‌ها با توجه به برخی از معیارها با استفاده از ابزارهای ریاضی است. بهینه‌سازی ریاضی اگر در یک لحظه از زمان انجام پذیرد آن را بهینه‌سازی ایستا و اگر در طول زمان انجام شود آن را بهینه‌سازی پویا خوانند. لذا در بهینه‌سازی ایستا، برخلاف پویا، متغیرها مستقل از زمان است. در این نوشتار، ابتدا به تعاریف اساسی در بهینه‌سازی ایستا پرداخته، سپس قضایای اساسی در برنامه‌ریزی ایستا اشاره کرده، آنگاه، برنامه‌ریزی کلاسیک در حالت‌های مختلف تشریح و قضایای یانگ و پوش بیان می‌شود. سپس برنامه‌ریزی غیرخطی و صورت های مختلف آن بحث می شود. برای بیان بهینه سازی ایستا از حساب دیفرانسیل، توابع حقیقی و جبر ماتریس‌ها استفاده می‌شود.

۱)تعاریف و قضایای اساسی

برای بحث در بهینه سازی ایستا آشنایی با برخی از مفاهیم و قضایا ضرورت دارد، در این بخش ابتدا به این موارد می‌پردازیم.

۱-۱) بیان صوری (Formal) بهینه‌سازی ایستا:

در بهینه‌سازی ایستا با عوامل زیر روبه‌رو هستیم:

- **متغیر تصمیم** (Decision Variable): آن را به $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ نشان می‌دهیم $X\in\mathbb{R}^n$.
- **فضای ممکن** (Feasible Space): آن را به A نشان می‌دهیم و داریم، $X\in A\subseteq\mathbb{R}^n$
- **تابع هدف** (Objective Function): آن را به $Z=F(X)$ نشان می‌دهیم.
- **مسئله:** تعیین X^* از فضای ممکن A به‌طوری‌که تابع هدف $Z=F(X)$ را ماکزیمم (بیشینه) یا مینیمم {کمینه) کند.
- **صورت کلی مسئله بهینه‌سازی به فرم زیر است:**

-

$$\begin{aligned}&Max,or,min\quad Z=F(X)\\&s.t.\quad X\in A\subseteq\mathbb{R}^n\quad (۱)\end{aligned}$$

با توجه به‌صورت‌های مختلف تابع هدف و فضای ممکن، مسئله (۱)، ممکن است مسئله برنامه‌ریزی کلاسیک یا غیرخطی و یا خطی باشد (اینتریلگیتور، ۱۳۸٦).

تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق (Global) و نسبی یا موضعی (Local):

تابع $Z=F(X)$ در $X^*\in A\subseteq\mathbb{R}^n$، ماکزیمم یا بیشینه مطلق است اگر:

$$\forall X\in A\Rightarrow F(X)\le F(X^*)$$

تابع در X^* مینیمم یا کمینه مطلق است اگر:

$$\forall X\in A\Rightarrow F(X)\ge F(X^*)$$

این تابع در X^* و همسایگی آن پیوسته باشد، تابع در این نقطه بیشینه نسبی است، اگر به‌ازای جمیع مقادیر نزدیک صفر ΔX داشته باشیم:

$$F(X^*+\Delta X)\le F(X^*)$$

کمینه نسبی است اگر

$$F(X^*+\Delta X)\ge F(X^*)$$

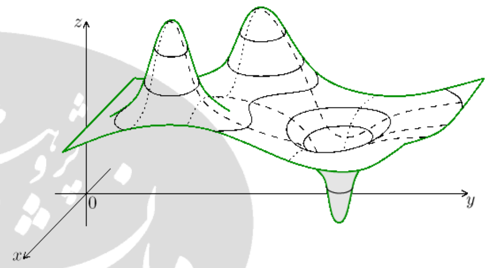
نکته: اگر تابع در نقطه‌ای بیشینه یا کمینه مطلق باشد و در آن نقطه و همسایگی آن پیوسته باشد، این نقطه بیشینه یا کمینه نسبی نیز هست.

تعریف نقطه زینی (Saddle Point):

اگر تابعی چندمتغیره نســبت به تغییرات برخی از متغیرها بیشینه و نسبت به تغییرات بقیه متغیرها کمینه باشد، نقطه را زینی گوینـد. تـابع دومتغیره $Z = F(x,y)$، در نقطـه، (x^*,y^*) زینی است، اگر

$$F(x^* + \Delta x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y^* + \Delta y)$$

این تابع نسبت به x^* بیشینه و نسبت به y^* کمینه و در (x^*,y^*) *زینی* است.



شکل (۱)

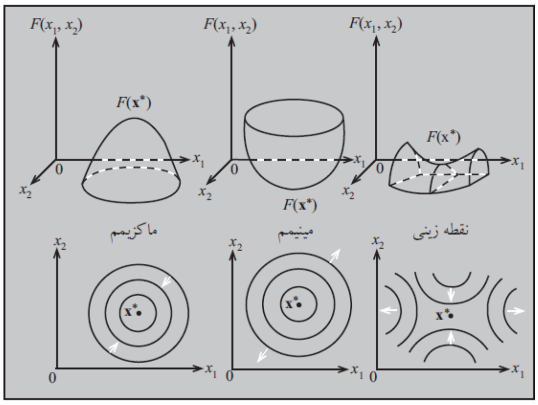
در شکل (۱) رویه نقاط بیشینه و کمینه مطلق، بیشینه نسبی، نقطه زینی دیده می‌شود.

منحنی تراز (Contour) یا بی‌تفاوتی:

اگر تابع هدف، $Z = F(X)$ را با صــفحه $Z = C$، ($C \in \mathbb{R}$) قطع کنیم، داریم، $F(X) = C$ این تابع موســوم به منحنی تراز یا بی‌تفاوتی اســت. اگر مقدار C تغییر کند منحنی‌های تراز مختلفی به‌دست می‌آید. اگر تابع هدف دومتغیره باشد، منحنی بی‌تفاوتی $F(x_1,x_2) = C$ اســت. در این رابطه اگر (x_1,x_2) تغییر کند مقدار z ثابت است.

ثابت می شود، جواب مسئله برنامه‌ریزی ایستا برای مسئله بیشینه بر بالاترین (برای کمینه پایین‌ترین) منحنی تراز است که در فضای ممکن می‌توان رسم کرد (همان، فصل دوم).

در شکل (۲) تابع هدف با نقاط بیشینه و کمینه وزینی و در هر مورد تصویر منحنی‌های تراز زیر آن رسم شده است.



شکل (۲)

تعریف امتداد ترجیحی :

تابع هدف را در نظر می‌گیریم، $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$، این تابع دارای n مشــتق جزئی مرتبه اول اســت. اگر برداری تشکیل دهیم که مؤلفه‌های آن این مشتقات باشد، آن را بردار گرادیان نامند، داریم:

$$\nabla Z(X) = \frac{\partial Z(X)}{\partial X} = \left(\frac{\partial Z(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial Z(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Z(X)}{\partial x_n}\right) = P$$

ثابت می‌شــود که حرکت در امتداد بردار گرادیان بیشــترین افزایش را به تابع هدف داده لذا آن را امتداد ترجیحی خوانند، برعکس حرکت در جهت مخالف آن بیشــترین کاهش را به تابع هدف می‌دهد (پورکاظمی، ۱۳۹٦: ۲۳۸/۲–۲٤۰).

قضایای اساسی در برنامه‌ریزی ایستا:

- قضیه وایرشتراس (شرط کافی)

اگر مجموعه فضای ممکن A ناتهی، فشرده (بسته و کراندار) و $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و تابع هدف $F(X)$ در A پیوسته بوده، تابع هدف در نقطه‌ای در فضــای ممکن در داخل یا در مرز آن دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.

- قضیه مطلق و موضعی (شرط کافی):

اگر مجموعه فضـای ممکن A ناتهی، فشـرده و در ضـمن محدب با شد، و تابع هدف $F(X)$ در A پیو سته ومقعر بوده، اگرتابع هدف در نقطه X^* ماکزیمم نسـبی باشـد تابع در این نقطه ماکزیمم مطلق اسـت. اگر تابع اکیداً مقعر باشـد، این ماکزیمم یکتاسـت (اینتریلیگیتور، ۱۳۸۶؛ پورکاظمی، ۱۳۹۳، فصل دوم)

قضیه یانگ:

اگر تابع $z = f(x,y)$ در هم سایگی (x_0, y_0) معین با شد و همچنین فرض می‌کنیم، $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$، در این همسـایگی معین و$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در این ناحیه پیوسته باشد، دراین‌صورت داریم:

$$=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y \qquad \partial y \partial x}$$

برای اثبات، نمو کامل تابع $f(x,y)$ رادر نقطه (x_0, y_0) نوشته واز قضیه میانگین استفاده کرده به رابطه فوق می‌رسیم.

نکته اول: توجه شود مفهوم این قضیه آن است که اگر برای هر تابع $z = f(x,y)$ شـرایط فوق برقرار باشـد، ترتیب مشتق‌گیری در مقدار آن اثر ندارد.

نکته دوم: درصورتی‌که برای تابع $z = f(x,y)$ شرایط قضیه یانگ برای مشتقات مراتب بالاتر، مثلاً مرتبه سوم نیز برقرار باشد، دراین‌صورت داریم:

$$=\frac{\partial^3 f(x_0,y_0}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2 \partial y \qquad \partial y \partial x^2}$$

(پورکاظمی، ۱۳۹۶: ۱۷۸/۲تا۱۸۱).

۲) برنامه‌ریزی کلاسیک:

صورت کلی مسئله برنامه‌ریزی کلاسیک به‌صورت زیر است:

$$Max\ or\ Min\ \mathrm{Z} = f(X)$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots., x_n), X_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{s.t.}\ \ G(X) = B \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ g_2(X) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(X) = b_m \end{cases} \Rightarrow G(X) = B \qquad (2)$$

این مسئله m قید، n متغیر دا شته، $n > m$ و n-m، را درجه آزادی گویند. مسئله برنامه‌ریزی کلا سیک دارای حالات زیر است.

۲-۱) حالت اول: $n = 1, m = 0$ ،، (۳)

$$Max\ or\ \min Z = F(x), x \epsilon \mathbb{R}$$

این ساده‌ترین مسئله برنامه‌ریزی کلاسیک است.

قضیه شرط لازم مرتبه اول و دوم: اگر تابع $Z = F(x)$ در نقطه x^* ماکزیمم (مینیمم) باشـد و در این نقطه دارای مشـتق باشد آنگاه لازم (شرط مرتبه اول) می‌آید،

$$\frac{dZ(x^*)}{dx} = F(\acute{x}^*) = ۰$$

اگر تابع در این نقطه دارای مشتق مرتبه دوم نیز با شد، آنگاه لازم می‌آ ید، (شـرط لازم مرتبه دوم) $\frac{d^2Z}{dx^2} \leq 0$ (برای کمینه علامت نامساوی فوق$0 \geq$ است).

نکته: شرط لازم فوق کافی است اگر تابع هدف مقعر باشد.

طبق قضیه از تابع (۳) مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده داریم:

$$\frac{dZ}{dx} = F'_x(x) = 0 \Rightarrow x = x^* \quad \Rightarrow Z^* = F(x^*)$$
$$\Rightarrow M(x^*, Z^*)$$

نقطه M را نقطه بحرانی (*Critical Point*) نامند، این نقطه ممکن است بیشینه یا کمینه یا هیچکدام باشد.

برای تعیین نوع نقطه بحرانی M از شـــرط لازم مرتبه دوم داریم:

$$\frac{d^2Z(x^*)}{dx^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \le 0 \Rightarrow Local\ Max \\ \ge 0 \Rightarrow Local\ Min \\ = 0 \Rightarrow \text{سه حالت دارد} \end{cases}$$

حالت سوم که مشتق مرتبه دوم صفر شد، همسایگی x^* یعنی $x^* + \Delta x$ را در مشـــتق مرتبه دوم نظر گرفته، حالات زیر برقرار است:

$$\frac{d^2Z(x^* + \Delta x)}{dx^2} \begin{cases} \le 0 \Rightarrow Local\ Max \\ \ge 0 \Rightarrow Local\ Min \\ = 0 \Rightarrow inflection\ point \end{cases}$$

حالت سـوم نقطه عطف اسـت (پورکاظمی، : ۱٦۵–۱۷۳).

۲-۲) حالت دوم: $\boldsymbol{n > 1, m = 0}$

$$MaxZ = F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n), X\mathcal{E}\mathbb{R}^n$$

به‌کمک بسط تیلور چند متغیره قضیه زیر ثابت می‌شود:

قضـــیه شـــرط لازم مرتبه اول: اگر تابع فوق در نقطهX^* ماکزیمم (مینیمم یا زینی) باشد و در این نقطه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشد، آنگاه، بردار گرادیان در این نقطه صفر است.

(٤)

$$\nabla Z(X^*) = \frac{\partial Z(X^*)}{\partial X} = (\frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_n}) = o$$

شرط لازم مرتبه دوم: اگر تابع در این نقطه دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم نیز باشـد، آنگاه، لازم می‌آید، (شـرط لازم مرتبه دوم)، $d^2Z(X) = (\Delta X)\, \acute{H}(X^*)(\Delta X) \le 0$)

علامت دیفرانســیل مرتبه دوم فوق که یک فرم درجه دوم است علامت ماتریس هشین در X^* است:

$$= \mathrm{H}(X^*) = \qquad (٥)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial x_1 x_2} \cdots & \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial x_n x_2} \cdots & \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \le 0 \, \frac{\partial^2 Z(X^*)}{\partial X^2}$$

نکته۱: اگر ماتریس فوق شـــبه‌معین مثبت یا نامعین باشد، نقطه بحرانی کمینه نسبی یا زینی است.

نکته۲: ماتریس فوق براســـاس قضـــیه یانگ یک ماتریس متقارن است.

از n معادله رابطه (٤) نقطه بحرانی $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ تعیین شـده و از ماتریس (٥) نوع نقطه به‌دست می‌آید (اینترلیگیتور، ۱۳۸٦، فصل سوم).

۳-۲) حالت سوم، تابع مقید:

تابع هدف دارای دو متغیر و یک قید باشد، یعنی $n = ۲, m = ۱$

$$Maxz = F(x_1, x_2)$$

$$\text{s.t. } g(x_1, x_2) = b \qquad (٦)$$

این مسئله به سه روش حل می‌شود:

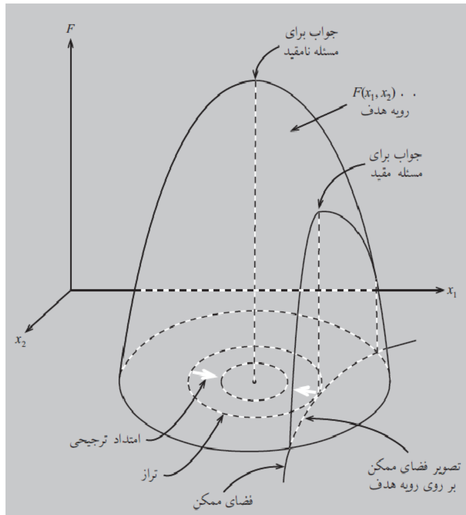
۱) روش جایگذاری:

در این روش از رابطه قید یکی از متغیرها را برحسـب متغیر دیگر محاسـبه می‌کنیم، داریم : $g(x_1, x_2) = b \Rightarrow x_2 = h(x_1)$

در تابع قرار می‌دهیم، داریم:

$$Maxz = F(x_1, h(x_1)) \Rightarrow, z = F_1(x_1)$$

این تابع یک مسئله بدون قید با یک متغیر است، حالت اول است، در شکل (۳) تابع هدف فوق و بیشینه آن (بدون قید) و بیشینه تابع مقید، نشان داده شده است.



شکل (۳)

۲)روش ضریب لاگرانژ:

مسئله برنامه‌ریزی (٦) را در نظر می‌گیریم:

$$Max\ z = F(x_1, x_2)$$
$$\text{s. t. } g(x_1, x_2) = b$$

ثابت می‌شود، جواب بهینه مسئله فوق منطبق است بر جواب بهینه تابع زیر:

(۷)

$$L = F(x_1, x_2) + \lambda[b - g(x_1, x_2)]$$

این تابع موسوم به تابع لاگرانژ و λ موسوم به ضریب لاگرانژ است، تابعی با سه متغیر و حالت دوم است. براساس شرط لازم مرتبه اول مختصات نقطه بحرانی تعیین می شود. داریم:

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = O \implies \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F'_{x_1} - \lambda g'_{x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = F'_{x_2} - \lambda g'_{x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x, x_2) = 0 \end{cases}$$

از دستگاه فوق مقادیر، $(x_1{}^*, x_2{}^*, L^* = z^*), \lambda^*$ به‌دست می‌آید. در نقطه بحرانی مقدار تابع لاگرانژ و تابع هدف برابر است.

شرط لازم مرتبه دوم:

علامت دترمینان مرزی هشین نوع نقطه بحرانی را تعیین می‌کند:

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & g'_{x_1} & g'_{x_2} \\ g'_{x_1} & L''_{x_1^2} & L''_{x_1x_2} \\ g'_{x_2} & L''_{x_2x_1} & L''_{x_2^2} \end{vmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} |\overline{H}_2| \geq 0, Local\ Max \\ |\overline{H}_2| \leq 0\ Local\ min \end{cases}$$

(پورکاظمی، ۱۳۹٦: ۲۵۹/۲تا۲۷۲).

نکته ۱: از دستگاه بالا اگر λ بین دو معادله اول را حذف کنیم، داریم:

$$\frac{F'_{x_1}}{F'_{x_2}} = \frac{g'_{x_1}}{g'_{x_2}}$$

این رابطه مبین آن است که نقطه بحرانی در مسئله (٦) منطبق است بر نسبت مشتقات تابع هدف به مشتقات تابع قید.

نکته ۲: رابطه فوق را در منفی ضرب کنیم، داریم:

$$-\frac{F'_{x_1}}{F'_{x_2}} = -\frac{g'_{x_1}}{g'_{x_2}}$$

طرف اول مشتتق منحنی بی‌تفاوتی $F(x_1, x_2) = C$ و طرف دوم مشتق تابع $g(x_1, x_2) - b = 0$ ، قید است. از این تساوی نتیجه می شود در نقطه بحرانی منحنی‌های بی‌تفاوتی و قید بر هم مماس‌اند.

تفسیر اقتصادی ضریب لاگرانژ:

تابغ لاگرانژ (۷) را در نظر می‌گیریم،

$$L = F(x_1, x_2) + \lambda[b - g(x_1, x_2)]$$

اول اینکه، اگر تابع هدف F پول باشـــد، مثلاً فروش، و تابع قید امکانات باشـــد، λ را می‌توان قیمت واحد این امکانات دانست و آن را قیمت سایه (Shadow Price) نامند.

دوم اینکه، از تابع لاگرانژ نســـبت به b مشـــتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \lambda \Rightarrow \frac{\partial L^*}{\partial b} = \lambda^*$$

چون در نقطه بحرانی تابع هدف و تابع لاگرانژ برابر اســـت. این رابطه مبین آنست، اگر یک واحد به امکانات اضافه یا کم شود تابع هدف به اندازه λ^* تغییر می‌کند.

۳) روش ترسیمی:

در حالت دومتغیره به‌کمک شکل مسئله را می‌توان حل کرد، ابتدا تابع قید را رســـم کرده، ســـپس یکی از منحنی‌های تراز، $F(x_1, x_2) = C$ را رســـم می‌کنیم، منحنی‌های تراز دیگر را در امتداد بردار ترجیحی رسم می‌کنیم، می‌دانیم جواب منطبق است بر بالاترین (پایین‌ترین در مسئله کمینه) منحنی تراز که در فضای ممکن که می‌توان رسم کرد.

نکته اول: می‌توان نشان داد شرط بیشینه بودن تابع مطلوبیت فوق، محدب بودن منحنی بی‌تفاوتی اســـت (وبر، ۱۳۸٦: ۵۳۷/۲).

نکته دوم: اگر جواب بهینه در گوشـــه‌ها باشـــد، به‌دلیل نبود مشتق در گوشه‌ها روش‌های اول و دوم جواب نمی‌دهد، ولی روش ترسیمی جواب می‌دهد.

٤-۲) حالت کلی:

صورت کلی مسئله برنامه‌ریزی کلاسیک (۲) دارای n متغیر و m قید است:

$$Max\ Z = F(X)$$

$$\text{s.t.}\ \ G(X) = B$$

تابع لاگرانژ به‌صورت زیر است:

$$L = F(X) + \lambda_1[b_1 - g_1(X)] + \lambda_2[b_2 - g_2(X)] + \cdots + \lambda_m[b_m - g_m(X)]$$

$$L = F(X) + \lambda_{1\times m}[B - G(X)]_{m\times 1}$$

شرایط لازم مرتبه اول:

بردار گرادیان تابع لاگرانژ برابر صفر است، یعنی:

$$\nabla L = O \Rightarrow (\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}) = 0_{1\times(m+n)}$$

رابطه فوق m+n معادله m+n مجهول اســـت، و از آن مقادیر $(X^*, Z^*), \lambda^*$، نقطه بحرانی به‌دست می‌آید.

شرایط لازم مرتبه دوم:

از ماتریس مرزی هشین زیر داریم:

$$\overline{H}_n = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & (\frac{\partial G}{\partial X})_{m\times n} \\ (\frac{\partial G}{\partial X})'_{n\times m} & (\frac{\partial^2 L}{\partial X^2})_{n\times n} \end{bmatrix}_{(m+n)(m+n)}$$

این ماتریس دارای $n+m$، دترمینان اصـــلی اســـت. اگر $n-m$ دترمینان آخر اصـــلی $\overline{H}_n$ علامتی متناوب و اولین آن دارای علامت $(-1)^{m+1}$ یا صفر باشد، تابع در نقطه بحرانی بیشینه نسبی است. اگر همگی دارای علامت $(-1)^m$ یا صفر باشد تابع در نقطه بحرانی کمینه نسبی است (Sydsaeter, 2008: 117-129؛ اینترلیگیتور، ۱۳۸٦، فصل سوم).

۳)قضیه پوش (Envelope Theorem):

در بهینه‌ســـازی اقتصـــاد غالباً تابع هدف و قیود آن به پارامترهایی بســـتگی دارد، در تعیین مقدار بهینه پارامترها را ثابت در نظر گرفته و مقادیر بهینه برحســـب این پارامترها

تعیین می‌شـــود. اما، این پارامترها در موقعیت‌های اقتصـــادی تغییر می‌کند، اگر می‌خواهیم تأثیر تغییر این پارامترها را بر مقادیر بهینه تعیین کنیم از قضـیه پوش در این مورد اســتفاده می‌شود (Sydsaeter, 2008: 121).

مســـئله برنامه‌ریزی کلاســـیک بدون قید را در نظر گرفته، فرض کنید تابع هدف دارای پارامتری مانند α باشـــد، داریم:

$$Max\ z = F(x_1, x_2, \alpha) \qquad (۸)$$

مقادیر بهینه را به‌کمک شـــرط لازم مرتبه اول تعیین می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z(\acute{X}^*)}{\partial x_1} = F'_{x_1}(x_1, x_2, \alpha) = 0 \\ ,\dfrac{\partial Z(\acute{X}^*)}{\partial x_2} = F'_{x_2}(x_1, x_2, \alpha) = 0 \end{cases}$$

ازحل دســـتگاه فوق مقادیر بهینه ,$(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha))$ تعیین می‌شود. روشن است مختصات نقطه بهینه تابعی از پارامتر α اســت. فرض می‌کنیم شــرط مرتبه دوم نیز برقرار باشــد. اگر این مقادیر بهینه را در تابع هدف قرار دهیم، تابع جدیدی برحسب α به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

(۹)

$$V(\alpha) = F(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha)$$

این تابع را تابع هدف غیرمستقیم (indirect function)، و چون مقدار بهینه تابع هدف است، تابع حداکثر ارزش (maximum- value function) نیز می‌نامند.

چون تابع هدف اصلی تابعی از پارامتر α است و مقدار بهینه آن نیز $V(\alpha)$ اســـت، حال اگر α یک واحد تغییر کند مقدار بهینه تابع هدف چقدر تغییر می‌کند.

قضـــیه پوش: ثابت می‌کنیم تغییر مقدار بهینه تابع هدف هنگامی که پارامتر α تغییر می‌کند کافی اســـت در تابع هدف ا صلی x_1, x_2 را ثابت فرض کرده و تنها ن سبت به α م شتق بگیریم که برابر $F'_{\alpha}(x_1, x_2, \alpha)$است.

از تابع غیرمستقیم (۹) نسبت به α مشتق گرفته داریم:

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = F'_{x_1}(x_1, x_2, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha} + F'_{x_1}(x_1, x_2, \alpha)\frac{dx_2}{d\alpha} + F'_{\alpha}(x_1, x_2, \alpha)$$

از شرط لازم،$F'_{x_1} = F'_2 = 0$ پس داریم:

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{dZ^*}{d\alpha} = F'_{\alpha}(x_1, x_2, \alpha) \ ،$$

این قضیه برای چند پارامتر نیز برقرار است.

نکته: قضـــیه پوش برای تابع مقید و لم هتلینگ را ببینید (Chiang, 2005: 430-432).

٤)بـرنـامـه‌ریـزی غـیـرخـطـی (Nonlinear Programing)

فرم کلی و استاندارد مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی به‌صورت زیر است:

(۱۰)

$$\text{MaxZ} = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) X_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{St.} \begin{cases} g_1(x_1, x_2 \cdots x_n) \le b_1 \\ g_2(x_1, x_2 \cdots x_n) \le b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2 \cdots x_n) \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge \cdot$$

$n \ge m$, یا $n < m$

اگر مســـئله فوق کمینه باشـــد، علامت نامســـاویز های قیود عوض می شود. م سئله با برنامه‌ریزی کلا سیک (۲) مقای سه شود، اول اینکه، قیود نامعادله است؛ دوم اینکه، متغیر تصمیم نامنفی؛ ســـوم اینکه، تعداد قیود می‌تواند کمتر یا مســـاوی یا بیشتر از تعداد متغیرها باشد. برای حل برنامه‌ریزی خطی سه حالت در نظر می‌گیریم.

۱-٤) حالت اول: تنها یک متغیر داشـــته و قیدی نداریم، $n = 1, m = 0$، مسئله (۱۰) به‌صورت زیر در می‌آید:

(۱۱)

$$Max\ Z = F(\ x)\ x \in \mathbb{R}$$
$$x \ge 0$$

قضـیه شـرط لازم و کافی: اگر تابع $Z = F(x)$ در نقطه x^* ماکزیمم ن سبی با شد و در این نقطه دارای م شتق مرتبه اول نیز باشد آنگاه لازم می‌آید:

(۱۲)

$$\frac{dZ(x^*)}{dx} = F_x{}'(x^*)\ \le 0 \text{ و } x^* \times\ F_x{}'(x^*) = 0$$

اگر تابع هدف مقعر (برای مسـئله کمینه محدب) نیز باشــد، شـرط لازم، کافی نیز هسـت. اگر مسـئله کمینه‌سـازی باشـد علامت نامساوی در شرط لازم عوض می‌شود.

۲-٤)حالت دوم:$n \ge 1, m = 0$، داریم:

$$Max\ Z = F(X) = F(x_1, x_2, \ldots., x_n) X_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n$$
$$X \ge 0 \quad (۱۳)$$

ق ضیه شرط لازم: اگر تابع $Z = F(X)$ در نقطه X^* ماکزیمم ن سبی با شد و در این نقطه دارای م شتقات جزئی مرتبه اول باشد، آنگاه داریم:

(١٤)

$$\frac{\partial Z(X^*)}{\partial X} = \nabla(X^*)\ \le \cdot$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_n}\right) \le 0$$

یعنی n نامعادله داریم یا:

$$\nabla(X^*).X^* = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_n}\right) \times (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots., x_n{}^*) = 0$$

کلیه عوامل ضرب داخلی برابر صفرند، لذا n معادله داریم:

(۱۵)

$$x_1^* \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_1} = 0 \text{ و } x_2^* \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_2} = 0 \text{ و } \ldots \text{ و } x_n^* \frac{\partial Z(X^*)}{\partial x_n} = 0$$

از معادلات (۱۵) نقطه بحرانی X^* بد ست بەد ست آمده، اگر در تمامی نامساوی‌های (١٤) صدق کند، جواب است.

ق ضیه فوق شرط کافی ا ست اگر تابع هدف مقعر با شد (برای مسئله کمینه محدب باشد).

۳-٤)حالت سوم: این حالت، $n = 2, m = 2$، داریم

$$Max\ Z = F(x, y)$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} g_1(x,y) \le b_1 \\ g_2(x,y) \le b_2 \end{cases} \quad (١٦)$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

شرایط لازم کان-تاکر (Kuhn-Tucker): مسئله به صورت اسـتاندارد فوق (یا کمینه) ابتدا تابع لاگرانژ را به‌صـورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L = F(x,y) + \lambda_1[b_1 - g_1(x,y)] + \lambda_2[b_2 - g_2(x,y)]$$

ثابت می‌شـود شـرایط لازم کان- تاکر به‌صـورت زیر برقرار است:

$$(١٧)\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} \le 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} \le 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \ge 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} \times x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} \times y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \times \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \times \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

از د ستگاه دوم (۱۷) مقادیر بحرانی $\lambda_2^*, \lambda_1^*, y^*, x^*$ ، محا سبه می‌شــود. این مقادیر در صــورتی موردقبول اســت که در نامساوی‌های (۱۷) صدق کنند.

شرط کافی:

ثابت می‌شود شرایط لازم کان-تاکر کافی نیز هست اگر فضای ممکن محدب و تابع هدف در این فضای ممکن مقعر (برای مسئله کمینه محدب) باشد.

نکته اول: اگر مسئله (١٦) به‌صورت کمینه باشد، علامت نامساوی‌ها در قیود (١٧) عکس می‌شود.

نکته دوم: ثابت می‌شود تابع لاگرانژدر مسئله فوق نسبت به y, x بیشینه ونسبت به λ_2, λ_1 کمینه است.

نکته سوم: اگر برخی از متغیرها منفی نیز باشند یا یکی از قیود مساوی باشد رابطه مربوط به آن متغیر و آن قید در نامساوی‌های (١٧) به صورت تساوی درمی‌آید و در دستگاه دوم آن رابطه حذف می‌شود.

نکته چهارم: در این حالتی که دو متغیر داریم، مسئله از روش ترسیمی قابل‌حل است. فضای ممکن را در فضای دوبعدی رسم کرده، جواب منطبق است بر بالاترین (برای مسئله کمینه پایین‌ترین) منحنی تراز که در فضای ممکن می‌توان رسم کرد (اینتریلیگیتور، ١٣٨٦، فصل چهارم) و (پورکاظمی، ١٣٩٦: ٢/٢٨٠-٢٨٤).

٤-٤) حالت کلی:

صورت برنامه‌ریزی غیرخطی (١٠) را به‌صورت ماتریسی می‌نویسیم، داریم:

$$\begin{gathered} Max\, Z = F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) X_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.t.}\;\; G(X) \le B \qquad (١٨) \\ X \ge 0 \end{gathered}$$

شرایط لازم کان-تاکر که برای حالت سوم استفاده کردیم برای این حالت نیز صادق است. تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم، داریم،

$$L = F(X) + \lambda_{1\times m}[B - G(X)]_{m\times 1} \qquad (١٩)$$

شرایط لازم کان -تاکر به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial X} - \lambda_{1\times m}.\frac{\partial G}{\partial X} \le 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial X} - \lambda_{1\times m}.\frac{\partial G}{\partial X}\right).X = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = [B - G(X)]_{m\times 1} \ge 0 \Rightarrow \lambda_{1\times m}[B - G(X)]_{m\times 1} = 0 \end{cases} \qquad (٢٠)$$

در دستگاه (٢٠) رابطه دوم ضرب داخلی است. اولی دارای n جمله و دومی m جمله، یعنی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \lambda_{1\times m}.\frac{\partial G}{\partial x_i}\right).x_i = 0 \\ \lambda_k[B - g_k(X)] = 0 \\ i = 1,2,\dots,n \;\text{و}\; k = 1,2,\dots,m \end{cases} \qquad (٢١)$$

ازm+n معادله (٢١) m+n مجهول، یعنی مقادیر $(X^*, Z^*), \lambda^*$، نقطه بحرانی به‌دست می‌آید. این جواب‌ها در صورتی مورد قبول هستند که در تمامی نامساوی‌های (٢٠) صدق کند.

شرط لازم فوق کافی است اگر فضای ممکن محدب و تابع هدف مقعر (برای مسئله کمینه محدب) باشد (اینتریلیگیتور، ١٣٨٦، فصل چهارم).

نکته: اگر مثالی دارای سه متغیر و سه قید باشد دستگاه (٢١) دارای ٦٤ حالت است، لذا حل مسئله با افزایش متغیرها و قیدها به‌صورت تحلیلی و دستی امکان‌پذیر نیست. اصولاً در برنامه‌ریزی ایستا اعم از کلاسیک یا غیرخطی، از روش‌های جستجوی تکراری (Sequential Search) مانند روش نیوتن رافسون یا روش فیبوناتچی و مانند آن استفاده می‌شود. یا روش‌های ابتکاری مانند شبکه‌های مصنوعی یا الگوریتم مورچگان و مانند آن به‌کار می‌رود (لئونبرگر، ١٣٩٤، فصول: هفت تا سیزده). البته قابل‌تذکر است که در اقتصاد برخلاف صنعت ما غالباً با توابع ساده در بهینه سازی روبه‌رو هستیم، ولی اگر توابع پیچیده باشد، باید از روش‌های فوق استفاده کرد. امروزه بسیاری از مدل‌های بهینه سازی اعم از مدل‌های کلاسیک، غیرخطی یا خطی به‌کمک نرم‌افزارهای کامپیوتری به سادگی قابل تجزیه‌وتحلیل هستند. در این میان می‌توان از نرم‌افزار هایی مانند؛ GAMS، LINDO، LINGO، QSB و

TORA استفاده کرد، این نرم‌افزارها غالباً براساس روش‌های جستجوی تکراری نوشته شده است.

کتاب‌شناسی

اینترلیگیتور، مایکل دی. (۱۳۸۶). *بهینه‌سازی ریاضی*، ترجمه محمدحسین پورکاظمی، چاپ دوم، تهران: دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۳). *بهینه سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن*، تهران: دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۶). *ریاضیات عمومی کاربردهای آن*، جلد دوم، چاپ نوزدهم، تهران: نشر نی.

لئون‌برگر، دیو ید جی. (۱۳۹٤). *برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی*، ترجمه نظام‌الدین مهدوی‌امیری و محمدحسین پورکاظمی، چاپ چهارم، تهران: دانشگاه صنعتی شریف.

وبر، ای. جین. (۱۳۸٦). *تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی*، ترجمه محمدحسین پورکاظمی، چاپ نهم، تهران: دانشگاه شهید بهشتی.

Arrow, K. J. , Interligator, M. D. (2019). *Hand Book of Mathematical Economic*, Elsevier.

Chiang, C, Alpha& Wainwright, K. (2005). *Fundamental methods of mathematical economic*, Mc Graw-Hill.

Sydsaeter, K. Hammond, P. , Seierstad, A. Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economics Analysis* ,(2nd ed.) Prentice Hall.

محمدحسین پورکاظمی

عضو هیئت‌علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی