روش‌های برآورد تک‌معادله‌ای

Single-Equation Estimation Methods

پس از تصریح الگوهای اقتصادسنجی، در مرحله بعدی به برآورد پارامترهای معادله رگرسیون با استفاده از اطلاعات موجود پرداخته می‌شود. براین‌اساس، به‌منظور عبور خطی از میان نقاط مفروض که دارای بهترین برازش باشد و رابطه میان متغیر وابسته و مستقل را به بهترین نحو بیان کند، برآوردگرهای گوناگونی وجود دارد که هریک دارای ویژگی‌های مختص به خود هستند. بنابراین، برآوردگر به‌عنوان فرمول، روش یا دستورالعملی برای برآورد یک پارامتر نامعلوم جامعه تعریف می‌شود که ازجمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به روش حداقل مربعات معمولی، حداکثر راست‌نمایی، حداقل مربعات تعمیم‌یافته، حداقل مربعات وزنی و مانند آن اشاره کرد (جانستون و دیناردو، ۱۳۹۵: ۲۳؛ هژبرکیانی، ۱۳۹۴: ۱۶).

ویژگی مطلوب برآوردکننده‌ها به دو دسته خواص نمونه کوچک(ناریب بودن، کارایی، کفایت) و خواص نمونه‌های بزرگ (ناریب بودن مجانبی و سازگاری)، تقسیم می‌شود. از جمله مهمترین معیارهای قضاوت در مورد مناسب بودن یک تخمین‌زن عبارت است از (۱) ناریب یا بدون تورش بودن(Unbiasedness)؛ بدین معنی که برآوردکننده به‌طور متوسط مقدار واقعی پارامتر جامعه را نشان دهد و امید ریاضی یک تخمین زننده برابر با پارامتر مورد نظر باشد. (۲)کارایی(Efficiency)؛ یعنی برآوردکننده در میان کلیه برآوردکننده‌های ناریب، کمترین واریانس را داشته باشد. (۳)کفایت(sufficency)؛ برآوردکننده‌ای این ویژگی را دارد که تمام اطلاعات نمونه را مورد استفاده قرار دهد. لازم به ذکراست کفایت شرط لازم برای کارایی است. (۴)سازگاری(consistency)؛ یکی از ویژگی‌های مجانبی برآوردگردها است که آن را اصطلاحاً همگرایی در احتمال می‌نامند. براین‌اساس، اگر حجم نمونه افزایش یابد حد احتمال برآوردکننده برابر مقدار واقعی پارامتر در جامعه است. گفتنی است حد احتمال برآوردکننده نقطه‌ای است که توزیع تغییر شکل می‌دهد. (۵) مجانباً ناریب (Asymptotic Unbiasedness)؛ بدین‌معنی که یک برآوردکننده ممکن است اریب باشد ولی وقتی حجم نمونه به سمت بی‌نهایت میل کند، ناریب می‌شود (هژبرکیانی، ۱۳۹۴: ۱۵-۲۶؛ سوری، ۱۳۹۵: ۸۵-۹۰). در ادامه به تشریح برخی روش‌های برآورد تک‌معادله‌ای ازجمله حداقل مربعات معمولی، حداکثر راست‌نمایی، حداقل مربعات تعمیم‌یافته و حداقل مربعات وزنی پرداخته می‌شود.

برآوردگر حداقل مربعات معمولی (Ordinary Least Squares)

روش حداقل مربعات معمولی (OLS) یکی از روش‌های رایج در تحلیل رگرسیون است که به کرل فردریک گوس ریاضیدان معروف آلمانی نسبت داده می‌شود (Gujarati, 2004: 395-58؛ گجراتی و پورتر، ۱۳۹۰: ۳۹). در این روش، پارامترها طوری تعیین می‌شوند که برای نمونه یا مجموعه داده‌های مفروض، $\sum u_i^2$ تا حد امکان کوچک باشد. به‌عبارت دیگر، روش حداقل مربعات معمولی تخمین‌های منحصربه‌فردی از پارامترها ارائه می‌دهد که دارای کوچک‌ترین مقدار ممکن $\sum u_i^2$ باشد (Gujarati, 2004: 61).

ازجمله ویژگی‌های تخمین‌زننده‌های حداقل مربعات عبارتند از: (۱) منحصراً برحسب مقادیر قابل‌مشاهده بیان می‌شوند. (۲) در نمونه مفروض با هر برآوردگر، فقط مقدار منحصرفردی برای پارامتر جامعه مربوطه ارائه می‌کنند. و (۳) زمانی که برآوردگرهای حداقل مربعات تعیین می‌شوند، می‌توان خط رگرسیون نمونه را به راحتی برازش کرد (Gujarati, 2004: 63).

بر این اساس، خط حداقل مربعات دارای ویژگی‌های مهمی است. ازجمله اینکه این خط مجموع مربعات پسماند

Encyclopedia of Economics
دانشنامه اقتصاد
enceco.ihcs.ac.ir

را حداقل می‌کند و از نقطه میانگین $(\bar{x},\bar{y})$ عبور می‌کند. افزون‌برآن، پسماندهای به‌دست‌آمده با مقادیر متغیرهای توضیحی X دارای همبستگی صفر است. همچنین، مجموع حاصلضرب پسماندها و مقدار تخمین‌زننده $\hat{y}_i$، $(\sum e_i\hat{y}_i)$ صفر است (جانستون و دیناردو، ۱۳۹۵: ۳۲؛ گجراتی و پورتر، ۱۳۹۰: ۴۱-۴۲).

قابل‌ذکر است روش OLS، با توجه به سادگی و ویژگی‌های بسیار جالب نظری که در قضیه گاوس- مارکف ارائه شده، کاربرد وسیعی دارد. تحت فروض الگوی کلاسیک، تخمین‌زننده‌های OLS با توجه به دارا بودن کمترین واریانس یا بیشترین کارایی در میان تمام تخمین‌زننده‌های خطی و ناریب، بهترین تخمین‌زننده ناریب (Best Linear Unbiased estimator) محسوب می‌شوند. ازجمله خواص آماری OLS عبارتند از: (۱) خطی بودن ضرایب برآوردشده؛ یعنی تابع خطی از یک متغیر تصادفی (مانند y) هستند. (۲) ناریب بودن تخمین‌زننده‌ها، (۳) ناریب بودن واریانس ($\sigma^2 = E(\hat{\sigma}^2)$) و (۴) کارایی ضرایب برآوردشده (گجراتی و پورتر، ۱۳۹۰: ۷۵-۷۶؛ هژبرکیانی، ۱۳۹۴: ۸۵-۱۰۰؛ جانستون و دیناردو، ۱۳۹۵: ۲۹-۳۲ ؛ Gujarati, 2004: 79).

حداقل مربعات تعمیم‌یافته (Generalized Least Square)

اگر الگو دارای واریانس ناهمسانی و یا خودهمبستگی باشد، ضرایب برآوردشده باوجود اینکه خطی و بدون تورش هستند، اما دیگر کارا و بهترین (BLUE) نیستند. به‌عبارت دیگر، دارای حداقل واریانس نیستند. بنابراین، یکی از روش‌هایی که درصورت وجود خودهمبستگی یا نابرابری واریانس‌های جملات اخلال جهت برآورد ضرایب رگرسیون مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش حداقل مربعات تعمیم‌یافته (GLS) است. در این روش برای حل مشکلات نقض فروض کلاسیک مذکور، بایستی متغیرهای اصلی الگو به‌گونه‌ای تغییر یابد که متغیرهای تبدیل‌شده فروض الگوی کلاسیک را تأمین کنند، که در این حالت روش حداقل مربعات معمولی مورد استفاده به روش GLS معروف است. به‌عبارت دیگر، روش GLS همان روش OLS برای متغیرهای تبدیل شده است که فروض استاندارد حداقل مربعات را تأمین می‌کند. بر این اساس ضرایب برآوردشده GLS ویژگی BLUE را دارا هستند (هژبرکیانی، ۱۳۹۴: ۲۴۹؛ سوری، ۱۳۹۵: ۳۰۷-۳۰۸؛ جانستون و دیناردو، ۱۳۹۵: ۲۰۱؛ Green, 1951: 265, 270 285؛ Gujarati, 2004: 395-396).

گفتنی است در GLSمجموع وزنی مربعات باقی‌مانده (weighted sum of residual square) حداقل می‌شود، درحالی‌که در OLSمجموع مربعات خطا (RSS) غیروزنی یا هم‌وزن به حداقل می‌رسد. در روش GLSوزنی که به هر مشاهده منسوب می‌شود دارای نسبت وارون با σ_i مربوطه است. بر این اساس، وزن کمتر برای مشاهداتی از جامعه با σ_i بزرگ‌تر و وزن بزرگ‌تر برای مشاهدات جامعه‌ای با σ_i کوچک‌تر در نظر گرفته می‌شود (Gujarati, 2004: 397).

حداقل مربعات وزنی (Weighted Least Square)

حداقل مربعات وزنی (WLS) حالت خاصی از روش حداقل مربعات تعمیم‌یافته است. در این حالت اگر واریانس عامل اختلال σ_i^2، معلوم باشد (یعنی واریانس خطای هریک از مشاهدات مشخص باشد) برای برآورد الگو از روش WLS استفاده می‌شود. در این روش، طرفین رابطه بر مقدار مشخص σ_i تقسیم می‌شود. بنابراین، الگوی تبدیل‌شده دیگر گویای مشکل واریانس ناهمسانی نخواهد بود و رگرسیون را می‌توان بر مبنای داده‌های تبدیل شده توسط روش OLS

Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

برآورد کرد. بر این اساس، با توجه به اینکه هریک از مشاهدات y_i و x_i دارای وزن معادل انحراف معیار σ_i^2 هستند، لذا تخمین زن‌های OLS که ازاین‌طریق به‌دست می‌آیند، معرف برآوردگرهای حداقل مربعات وزنی است. اگر σ_i^2 مجهول باشد، برای استفاده از روش WLS، باید با استفاده از روش‌های قابل‌قبول در مورد σ_i^2، فروضی را در نظر گرفت (مانند واریانس خطا نسبتی از x_i) که از طریق آن بتوان الگو را تبدیل و شرایط همسانی واریانس را فراهم کرد. در نهایت، داده‌های تبدیل‌شده می‌توانند با استفاده از OLS، که در این حالت همان روش WLS است، برآورد شوند (گجراتی و پورتر، ۱۳۹۰: ۳۷۴-۳۷۶؛ Green, 1951: 277-280؛ Gujarati, 2004: 400, 415, 417).

در این زمینه شایان ذکر است که برآورد ضرایب در حالت واریانس ناهمسانی در دو روش GLS و WLS یکسان هستند (Gujarati, 2004: 397).

برآوردگر حداکثر راست‌نمایی (maximum likelihood estimation)

در روش حداکثر راست‌نمایی به پارامترها مقادیری نسبت داده می‌شود که احتمال مشاهده‌ی آن مجموعه ویژه از مشاهدات را حداکثر کند. به‌عبارت دیگر، در این روش آن مقادیری از پارامترها محاسبه می‌شوند که تابع درست‌نمایی را به حداکثر برساند (پاریخ و بیلی، ۱۳۸۱: ۸۲؛ هژبرکیانی، ۱۳۹۴: ۷۹؛ جانستون و دیناردو، ۱۳۹۵، ۱۸۷-۱۸۸؛ سوری، ۱۳۹۶: ۵۳۳).

در روش حداکثر راست‌نمایی پس از مشخص شدن تابع، احتمال مشاهدات در نمونه در مقایسه با پارامترهای مجهول به حداکثر رسانده می‌شود. گفتنی است در مواردی که فرضی از فروض اساسی رگرسیون نقض می‌شود، ممکن است برآوردگرهای حاصل از روش OLS دارای خواص مطلوب نباشند، این در حالی است که برآوردگرهای حاصله از روش ML دارای خواص مطلوب است (هژبرکیانی، ۱۳۹۴: ۸۱).

ازجمله خواص عمده تخمین‌زننده‌های ML که مربوط به نمونه‌های بزرگ یا مجانبی است، تحت‌شرایط نسبتاً کلی عبارتند از: (۱) سازگاری، (۲) نرمال مجانبی (Asymptotic Normality)؛ یعنی دارای توزیع مجانبی نرمال به مرکزیت مقادیر صحیح پارامترها، (۳) ثبات (invariance)، (۴) میانگین صفر و واریانس $I(\theta)$ و (۳) کارایی مجانبی (Asymptotic efficiency)؛ بدین‌معنی که هیچ برآوردگر سازگار و مجانباً نرمال دیگری نمی‌تواند واریانس مجانبی کمتری داشته باشد. به‌عبارت دیگر، اگر حداقل واریانسی وجود داشته باشد، آن به‌وسیله روش ML به‌دست آمده است و این واریانس پایین‌ترین حد را نشان می‌دهد که نمی‌توان واریانس هیچ تخمین‌زننده ناریبی را تا آن حد کاهش داد. این ویژگی متناظر با معیار حداقل واریانس تخمین‌زننده‌های OLS در نمونه‌های متناهی است (جانستون و دیناردو، ۱۳۹۵: ۱۸۸-۱۹۰؛ پاریخ و بیلی، ۱۳۸۱: ۸۴؛ Green, 1951: 514).

قابل‌ذکر است برآوردگرهای ضرایب رگرسیون در روش ML به‌طور دقیق برابر برآوردگردهای روش OLS است. همچنین، برآورنده σ^2 در روش ML برابر با $\frac{\acute{e}e}{n}$ است (پاریخ و بیلی، ۱۳۸۱: ۸۴).

کتاب‌شناسی

پاریخ، ا. و بیلی، د. (۱۳۸۱). *روش‌های تحلیل اقتصادی و کاربرد آن‌ها*، ترجمه مجید کوهپایی، تهران: دانشگاه تهران.

جانستون، ج. و دیناردو، ج. (۱۳۸۸). *روش‌های اقتصادسنجی*، تهران: نورعلم و دانشگاه علوم اقتصادی.

سوری، ع. (۱۳۹۵). *اقتصادسنجی ۱ مقدماتی همراه با کاربرد Eviews و Stata*، تهران: فرهنگ‌شناسی.

سوری، ع. (۱۳۹۶). *اقتصادسنجی ۲ پیشرفته همراه با کاربرد Eviews و Stata*، تهران: فرهنگ‌شناسی.

Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

گجراتی، د. و پورتر، د. (۱۳۹۰). *اقتصادسنجی مقدماتی (نظری و کاربردی)*، ترجمه منوچهر عسگری، تهران: انتشارات بازتاب.

هژبرکیانی، ک. (۱۳۹۴). *اقتصاد سنجی و کاربرد آن*، تهران: جهاد دانشگاهی (دانشگاه شهید بهشتی).

Gujarati, D.N. (2004). *Basic Econometrics*, fourth Edition, McGraw-Hill Companies.

Greene, W. (1951) *Econometric analysis*, 7th Edition, Upper Saddle River, NJ Pearson Prentice Hall.

سمانه عابدی

گروه اقتصاد انرژی، کشاورزی و محیط زیست، دانشکده اقتصاد،

دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

Encyclopedia of Economics

دانشنامه اقتصاد

پژوهشکده دانشنامه نگاری

enceco.ihcs.ac.ir