فرایندهای تصادفی پایا

Stationery Stochastic Processes

اغلب داده‌های آماری مربوط به اقتصاد کلان و اقتصاد مالی از نوع داده‌های سری زمانی هستند، یک سری زمانی را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$y_1, y_2, \dots, y_T \qquad (۱,۱)$$

T نشان‌دهنده تعداد مشاهدات در طول زمان است.

عمده‌ترین فرض در تحلیل‌های سری زمانی آن است که هر مشاهده در زمان t یعنی y_t تنها یک مصداق[۱] از متغیر تصادفی y_t است. بنابراین، آنچه در (۱,۱) به‌عنوان یک سری زمانی نشان داده شده است، درواقع مصداقی از یک سلسله متغیر تصادفی y_t برای $t = 1,2, \dots, T$ است که برای هر یک از متغیرها تنها یک مشاهده وجود دارد[۲](اندرس[۳]، ۲۰۱۵). به این سلسله از متغیرها در اصطلاح فرایند تصادفی[۴] می‌گویند و آن را اغلب به‌صورت $\{y_t\}$ نمایش می‌دهند.

ازآنجاکه در رابطه با یک‌سری زمانی نظیر (۱,۱)، با تعداد T متغیر تصادفی $y_1, y_2, \dots, y_T$ مواجه هستیم و از هر متغیر تصادفی تنها یک مشاهده یا مصداق را در اختیار داریم، واضح است که نمی‌توانیم توزیع احتمال این متغیر تصادفی را مشخص کنیم، مگر آنکه این توزیع‌های احتمال دارای ویژگی‌های مشترکی باشند. در ادامه چنین امری تحت عنوان پایایی قوی و پایایی ضعیف موردبحث قرار خواهد گرفت.

[1]. Realization

[۲]. بر اساس نمادگذاری متعارف مربوط به سری‌های زمانی، تمایزی بین مشاهده و متغیر تصادفی وجود نداشته و هر دو با حروف کوچک نمایش داده می‌شوند. حال آنکه در آمار به‌طور معمول مشاهده با حرف کوچک و متغیر تصادفی با حرف بزرگ نشان داده می‌شود.

[3]. Enders

[4]. Stochastic Process

پایایی قوی یا پایایی محض(Strong or Strict Stationarity)

وقتی در فرایند تصادفی $\{y_t\}$، توزیع احتمال متغیرهای تصادفی y_t برای $t = 1, 2, \dots, T$ کاملاً همانند باشند و یا به‌عبارت‌دیگر توزیع احتمال y_t در طول زمان ثابت باقی بماند، آنگاه می‌توان چنین تلقی کرد که تمامی T کمیت مشاهده‌شده $y_1, y_2, \dots, y_T$ متعلق به یک توزیع واحد است. درنتیجه می‌توان استنباطی را در مورد توزیع احتمال y_t بر اساس مشاهداتی که در طول زمان حاصل شده‌اند داشت. به این ویژگی y_t که توزیع احتمال y_t برای تمام زمان‌ها یکسان است در اصطلاح پایایی قوی یا کامل[۵] گفته می‌شود (لوتکاپل و کراتزیگ[۶]، ۲۰۰۴). بنابراین برحسب تعریف، سری زمانی $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ را وقتی به‌طور قوی یا مؤکد پایا می‌گویند که تابع احتمال مشترک آن به زمان بستگی نداشته باشد. این امر به آن مفهوم است که تمام گشتاورهای توزیع y_t، اعم از میانگین، واریانس، کوواریانس و گشتاورهای مراتب بالاتر همگی به زمان بستگی نداشته و ثابت باشند.

پایایی ضعیف یا پایایی کوواریانسی (Weakly stationary or Covariance Stationary)

درعمل تقریباً غیرممکن است که در رابطه با فرایند تصادفی $\{y_t\}$، بتوان برای حصول اطمینان از پایایی، تمام گشتاورهای آن را مورد بررسی قرار داد. یک مفهوم عملی‌تر از پایایی، پایایی ضعیف یا پایایی کوواریانسی[۷] است که فقط مستلزم آن است تا میانگین، واریانس و کوواریانس y_t ثابت و مستقل از زمان باشد[۸] (کیرچگسنر، ولترز و هسلر[۹]، ۲۰۱۳) . به‌عبارت دیگر، به‌طور معمول در موارد کاربردی،

[5]. Strong or Strict Stationarity

[6]. Lutkepohl and Kratzig

[7]. Weakly stationary or Covariance Stationary

[۸]. تعریف ضعیف‌تری از پایایی آن است که میانگین yt در طول زمان ثابت باشد.

[9]. Kirchgassner, Wolters and Hassler

فرآیند تصادفی $\{y_t\}$ وقتی پایا تلقی می‌شود که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. میانگین آن در طول زمان و در مقاطع زمانی مختلف ثابت باشد.

$$E(y_t) = \mu$$

۲. واریانس آن در طول زمان و در مقاطع زمانی مختلف ثابت باشد.

$$var(y_t) = E(y_t - \mu)^2 = \sigma_y^2$$

۳. کواریانس بین y_t و y_{t-s}، (دو مقدار y_t که s دوره با یکدیگر فاصله دارند)، در طول زمان و در مقاطع زمانی مختلف ثابت باشد.

$$cov\left(y_t \text{ و } y_{t-s}\right) = E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)]$$
$$= \gamma_s \quad \text{و} \quad s = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \ldots$$

و درنتیجه:

۴. ضریب همبستگی بین y_t و y_{t-s} در طول زمان و در مقاطع زمانی مختلف ثابت باشد.

$$corr\left(y_t \text{ و } y_{t-s}\right) = \frac{cov\left(y_t \text{ و } y_{t-s}\right)}{var(y_t)}$$
$$= \rho_s \quad \text{و} \quad s = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \ldots$$

به‌عبارت دیگر، هرگاه میانگین، واریانس و کواریانس و درنتیجه ضریب همبستگی یک متغیر سری زمانی به زمان بستگی نداشته و در طول زمان ثابت باقی بمانند، آن سری زمانی یک سری زمانی پایا است. این شرایط تضمین می‌کنند تا رفتار یک سری زمانی پایا در هر مقطع متفاوتی از زمان که در نظر گرفته شود همانند باشد.

نوع خاصی از فرایندهای پایا فرایند نوفه سفید است که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم:

نوفه سفید یا فرایند تصادفی ناب(White noise or Pure random Process)

فرایند تصادفی $\{u_t\}$ را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

1) $E(u_t) = 0$
2) $var(u_t) = \sigma_u^2$
3) $cov(u_t \text{ و } u_{t-s}) = 0 \quad \text{و} \quad t \neq s$

در شرایط گفته‌شده فرایند تصادفی پایای $\{u_t\}$ را اصطلاحاً «فرایند تصادفی ناب»[10] و یا نوفه سفید[11] می‌گویند.

به‌منظور تشخیص پایایی یا ناپایایی یک فرایند تصادفی و همچنین درخصوص چگونگی الگوسازی چنین فرایندی بسیار معمول است که از تابع خودهمبستگی استفاده شود. به‌همین جهت در ادامه تابع خودهمبستگی معرفی می‌شود.

تابع خودهمبستگی (Autocorrelation Function (ACF))

محققان برای پی بردن به ویژگی‌های یک متغیر سری زمانی به‌صورت گسترده‌ای از تابع خودهمبستگی[12] استفاده می‌کنند (نوفرستی، ۱۳۷۸). برای محاسبهٔ همبستگی بین y_t و y_{t-s}، که مربوط به s دوره قبل است، می‌توان از شاخص ضریب همبستگی به‌صورت زیر استفاده کرد.

$$\rho_s = \frac{cov(y_t \text{ و } y_{t-s})}{var(y_t)} \quad \text{و} \quad s = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \ldots$$

دامنهٔ تغییرات ρ_s بین ۱- تا ۱+ است ($-1 \leq \rho_s \leq 1$).

به‌طور معمول، یک فرایند تصادفی نظیر $\{y_t\}$ از زمان منهای بی‌نهایت آغاز شده و تا زمان به‌علاوه بی‌نهایت در آینده ادامه خواهد داشت. در این مسیر تنها نمونه کوچکی

---

10. Pure random Process
11. White noise
12. Autocorrelation Function (ACF)

به حجم T از مقادیر متغیر تصادفی y قابل مشاهده بوده است. بر اساس مقادیر مشاهده‌شده در این نمونه می‌توان ضریب همبستگی بین y_t و y_{t-s} را به‌صورت زیر برآورد کرد.

$$\hat{\rho}_s = \frac{\frac{1}{T-S}\sum_{t=s+1}^{T} \quad (y_t - y^-)(y_{t-s} - y^-)}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \quad (y_t - y^-)^2}$$

در این رابطه $\hat{\rho}_s$ ضریب همبستگی نمونه، s فاصله زمانی بین دو مشاهده مربوط به y و T تعداد مشاهدات است.

وقتی در یک متغیر سری زمانی، ضرایب همبستگی را به‌صورت تابعی از s در نظر گرفته و مقدار آن را برای وقفه‌های ... و3 و2 و$s = 1$ محاسبه می‌کنند، به آن تابع خودهمبستگی[۱۳] می‌گویند.

کتاب‌شناسی

نوفرستی، محمد (۱۳۷۸). *ریشه واحد و همجمعی در اقتصادسنجی*، تهران: انتشارات رسا.

Enders W. (2015). *Applied Econometric Time Series*, 4th Edition, John Wiley & Sons Ltd.

Kirchgassner G., J. Wallters and U. Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*, 2nd Edition, Springer.

Lutkepohl H. and M. Kratzig (2004). *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University press.

محمد نوفرستی

دانشکده اقتصاد، دانشگاه شهید بهشتی

13. Autocorrelation Function