آزمون ریشه واحد

Unit Root Test

بسیاری از محققان اقتصادی بر این باورند که عموم متغیرهای اقتصاد کلان ناپایا هستند. از سوی دیگر، استفاده از روش OLS در برآورد ضرایب الگو بر این فرض استوار است که متغیرها پایا هستند. چنانچه متغیرهای دخیل در الگو ناپایا باشند، ممکن است رگرسیون برآوردشده کاذب باشد. بنابراین، لازم است پایایی متغیرهای الگو قبل از برآورد الگو مورد آزمون قرار گیرد. چنین آزمونی را به‌اصطلاح آزمون ریشه واحد می‌گویند.

مشاهده نمودار سری زمانی یک متغیر تا اندازه زیادی می‌تواند به تشخیص پایایی و ناپایایی آن متغیر کمک کند. واقعیت آن است که بسیاری از متغیرهای اقتصاد کلان، نظیر مصرف، سرمایه‌گذاری، صادرات، واردات و تولید ناخالص داخلی، در طول زمان در حال افزایش هستند. بنابراین، حداقل میانگین این متغیرها در طول زمان ثابت نبوده و درنتیجه ناپایا هستند. اما، در برخی موارد، هرچند ممکن است یک متغیر سری زمانی در طول زمان افزایش یافته و ناپایا باشد، با وجود این، بعید نیست که در حول‌وحوش یک روند زمانی قطعی پایا باشد. اینجاست که بحث متغیرهای روند – پایا و تفاضل – پایا مطرح می‌شود.

فرایندهای روند – پایا و تفاضل – پایا

(Trend Stationary (TS) and Difference Stationary (DS) Processes)

یک فرایند روند – پایا فرایندی است که در طول زمان حول‌وحوش یک روند زمانی قطعی نوسان می‌کند. اگر متغیری دارای روند زمانی قطعی باشد مسیر حرکت آن در طول زمان به‌طور کامل قابل‌پیش‌بینی است. برای مثال، فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$y_t = y_{t-1} + \mu$$

که در آن μ یک مقدار ثابت غیرتصادفی است. اکنون اگر این فرایند را از زمان t = 1 دنبال کنیم، مقدار دقیق y_t در هر مقطع زمانی t از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$y_t = y_0 + \mu t$$

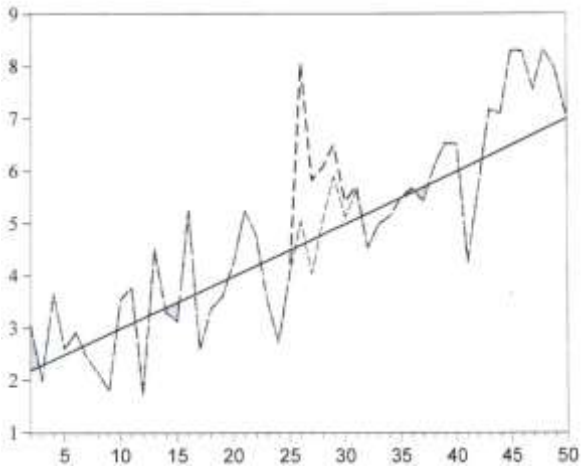
رابطه فوق یک روند زمانی قطعی با عرض مبدأ y_0 و شیب μ است. اکنون اگر فرایند پایای $\{u_t\}$ را به روند زمانی قطعی فوق اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$y_t = y_0 + \mu t + u_t$$

این الگو دارای یک روند زمانی قطعی $y_0 + \mu t$ است که y_t در طول زمان حول‌وحوش آن نوسان می‌کند. به سری زمانی y_t به‌اصطلاح سری زمانی روند – پایا می‌گویند، زیرا اگر بخش روند زمانی $y_0 + \mu t$ را از این فرایند حذف کنیم، آنچه باقی خواهد ماند یک سری زمانی پایا به‌صورت زیر است:

$$y_t - (y_0 + \mu t) = u_t$$

سری‌های زمانی روند – پایا نظیر y_t از این طبیعت برخوردارند که اگر در مقطع زمانی خاصی تکانه‌ای به آن‌ها وارد شود، اثر این تکانه به‌سرعت از بین رفته و y_t به روند بلندمدت قطعی خود بازمی‌گردد و در آن مسیر به حرکت خود ادامه می‌دهد. شکل ۱ چنین مفهومی را به نمایش گذاشته است. مشاهده می‌کنید که تکانه وارده به متغیر y_t در مقطع زمانی ۲۵ به‌سرعت زایل شده و y_t پس از مدت کوتاهی به مسیر حرکت بلندمدت خود در راستای روند زمانی قطعی باز می‌گردد.



Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

شکل ۱- زایل شدن تکانه وارده به یک متغیر روند – پایا

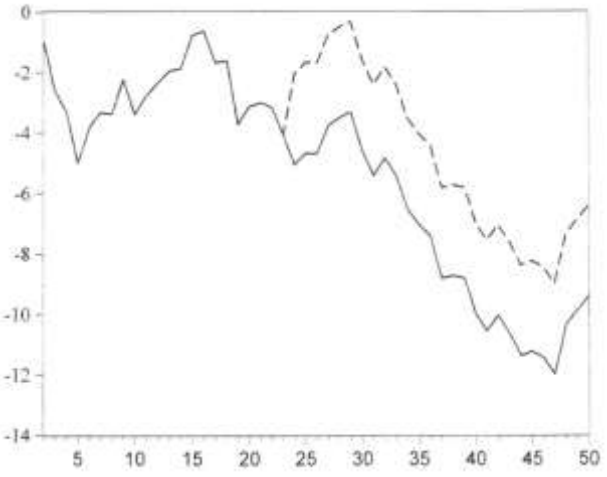
بنابراین، اگر یک متغیر اقتصادی روند - پایا باشد، اثر یک تکانه سیاستی بر آن بسیار زودگذر و ناپایدار است. به همین جهت گفته می‌شود اعمال سیاست اقتصادی بر متغیرهای روند – پایا کاری عبث و بی‌فایده است. اعمال یک سیاست اقتصادی وقتی مفید است که بتواند سطح متغیر موردنظر را برای همیشه در جهت موردنظر تغییر دهد.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که به روند زمانی قطعی $y_0 + \mu t$ ، فرایند ناپایای $\sum_{i=1}^{t} u_i$ اضافه شده باشد:

$$y_t = y_0 + \mu t + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

در این فرایند وقتی تکانه‌ای به y_t در مقطع خاصی وارد می‌شود، هیچ گونه گرایشی به بازگشت به‌سوی روند زمانی قطعی مشاهده نمی‌شود. به همین جهت گفته می‌شود که متغیر y_t باوجود دارا بودن روند زمانی قطعی، از یک روند زمانی تصادفی نیز برخوردار است. ملاحظه می‌شود که حذف روند قطعی از فرایند y_t موجب پایایی آن نمی‌شود و تنها راهی که می‌توان به یک فرایند پایا دست یافت تفاضل‌گیری است. به همین جهت به فرایند ناپایای y_t که در عین حال دارای روند زمانی قطعی است، فرایند تفاضل – پایا می‌گویند.

وقتی متغیر y_t از روند زمانی تصادفی برخوردار بوده و در نتیجه ناپایا باشد، تکانه وارده به آن اثری دائمی خواهد داشت. شکل ۲ متغیر y_t را به‌گونه‌ای نشان می‌دهد که از روند زمانی تصادفی برخوردار است. ملاحظه می‌شود تکانه‌ای که در مقطع زمانی ۲۵ بر y_t وارد شده است، سطح آن را برای همیشه تغییر داده است.



شکل ۲ – پایداری اثر تکانه به یک متغیر تفاضل – پایا

مسئله پایایی و ناپایی متغیرهای سری زمانی و شکل دقیق ناپایایی از نظر دارا بودن روند زمانی قطعی و روند زمانی تصادفی، بحث داغی را از حدود ۲۵ سال پیش موجب شده است. تشخیص پایایی و ناپایی را می‌توان به کمک آزمون‌های آماری که برای این منظور ساخته شده است به انجام رساند. یکی از معروف‌ترین آزمون‌ها در این رابطه آزمون دیکی – فولر (Dickey–Fuller,1979) است که وجود ناپایی را در مقابل پایایی مورد آزمون قرار می‌دهد و دیگری آزمون KPSS ارائه‌شده توسط کوکاوسکی، فیلیپس اشمیت و شین (Kwialkowski – Phillips – Schmidt and Shin, 1992) است که برعکس آزمون دیکی – فولر، پایایی را در مقابل ناپایی آزمون می‌کند. این آزمون‌ها را می‌توان با تفصیل بیشتری در کتاب‌های اقتصادسنجی سری‌های زمانی از جمله اندرس (Enders, 2015)، هاتاناکا (Hatanaka, 2003)، کرچ‌گسنر و همکاران (Kirchgassner et al., 2013)، لوتکاپل و کراتزیگ (Lutkepohl and Kratzig, 2004) و نوفرستی (۱۳۹۵) یافت.

آزمون دیکی – فولر (Dickey – Fuller Test)

Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

آزمون دیکی – فولر که به آزمون ریشه واحد نیز شهرت دارد، یکی از اولین روش‌هایی است که برای آزمون ناپایایی توسط دیکی و فولر (۱۹۷۹) تدوین شده است. در این آزمون یک فرایند AR(1) نظیر فرایند زیر را برای متغیر سری زمانی y_t تصریح می‌کنند.

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + u_t$$

اکنون اگر قدر مطلق ρکوچک‌تر از یک باشد، فرایند $\{y_t\}$ پایا تلقی خواهد شد. در مواردی که y_t یک متغیر اقتصادی نظیر تولید ناخالص ملی است، کمیت ρنمی‌تواند منفی باشد. زیرا، در آن صورت مقدار y_t به‌طور متناوب منفی و مثبت خواهد شد. در عین حال، ρ نمی‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد، چون این امر موجب خواهد شد تا مقدار y_t با گذشت زمان به‌شدت و به‌صورت نمایی افزایش یابد. چنین خصیصه‌ای نیز در داده‌های اقتصادی وجود ندارد. بنابراین، در رابطه با متغیرهای اقتصادی، کمیت ρ باید به‌طور معمول در بازه صفر تا یک ($0 \le P \le 1$) قرار بگیرد. اکنون اگر $\rho = 1$ باشد، فرایند $\{y_t\}$ ناپایا و چنانچه $\rho < 1$ باشد، فرایند $\{y_t\}$ پایا خواهد بود. بنابراین، می‌توان فرضیه صفر و فرضیه مقابل را به‌صورت زیر نوشت:

سری زمانی y_t دارای ریشه واحد و ناپا است $H_0 : \rho = 1$

سری زمانی y_t پایا است $H_1: \rho < 1.$

برای انجام این آزمون می‌توان ρ را از رابطه

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + u_t$$

به روش *OLS* برآورد کرد و آماره آزمون را به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$\frac{\hat{\rho} - 1}{S_{\hat{\rho}}}$$

اما این اماره آزمون دارای توزیع t معمول نیست و کمیت‌های بحرانی مربوط به توزیع t برای آن صادق نیست. دیکی و فولر به‌کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو توزیع احتمال آن را که τ (تا) نامیده‌اند به‌دست آورده و کمیت‌های بحرانی را محاسبه کرده‌اند. با توجه به یک دامنه بودن آزمون مورد بحث، چنانچه کمیت آماره آزمون منفی‌تر از کمیت بحرانی باشد، H_0 رد خواهد شد. به‌عبارت دیگر، می‌پذیریم که متغیر سری زمانی y_t پایا است.

از آنجا که به‌طور معمول برابری ضرایب رگرسیون با صفر را مورد آزمون قرار می‌دهند، چنانچه y_{t-1} را از طرفین رابطه $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$ کم کنیم، رابطه‌ای به‌صورت زیر حاصل خواهد شد که در آن آزمون ریشه واحد را می‌توان به‌کمک آزمون برابری ضریب رگرسیون با صفر به انجام رسانید.

$$y_t - y_{t-1} = \rho y_{t-1} - y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta y_t = (\rho - 1) y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + u_t$$

آزمون برابری γ با صفر در رابطه فوق در واقع آزمون وجود ریشه واحد است.

$$H_0: \gamma = 0\,,(\rho - 1) = 0\ ,\rho = 1$$
$$H_1: \gamma < 0\,,(\rho - 1) < 0\ ,\rho < 1$$

نکته قابل توجه در رابطه با آزمون پایایی به روش دیکی–فولر آن است که توزیع τ مربوط به توزیع احتمال $\hat{\rho}$ به این مسئله که رگرسیون AR(1) تصریح شده دارای عرض از مبدأ، روند زمانی یا هر دو باشد حساس است و کمیت‌های بحرانی در هر مورد متفاوت خواهد بود. ازاین‌رو، لازم است قبل از آزمون ریشه واحد، ضرورت وجود یا نبود عرض از مبدأ و روند در رگرسیون مشخص شود. در این رابطه توصیه آن است که ابتدا رگرسیون AR(1) با وجود عرض از مبدأ و روند برآورد شود. آنگاه معنی‌دار بودن ضریب مربوط به روند زمانی به‌کمک توزیع t معمول آزمون شود. اگر معنی‌دار بود حفظ شده و در غیر این صورت حذف شود و مجدداً الگو برآورد شود. سپس معنی دار بودن عرض از مبدأ به‌کمک توزیع t معمول مورد آزمون قرار گیرد و نسبت به وجود یا نبود آن قضاوت شود. بعد از این مرحله است که

Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

می‌توان به‌کمک توزیع τ در مورد وجود ریشه واحد اظهارنظر کرد. ناگفته نماند درصورتی ضرایب برآوردشده الگوی تصریح‌شده قابل اعتماد هستند که جمله اخلال u_t رگرسیون نوفه سفید باشد.

آزمون دیکی-فولر تعمیم‌یافته (Augmented Dickey-Fuller Test)

روش دیکی-فولر برای آزمون ریشه واحد بر این فرض استوار است که سری زمانی y_t را بتوان توسط یک فرایند خودرگرسیون مرتبه اول AR(1) به‌درستی الگوسازی کرد. اما اگر الگوی مناسب یک الگوی خودرگرسیون از مرتبه P باشد، در نظر گرفتن الگوی AR(1) سبب خواهد شد تا جملات اخلال آن دچار خود همبستگی باشند و در نتیجه ضرایب برآورده‌شده قابل اتکا نباشند. دیکی و فولر نشان داده‌اند که تحت چنین شرایطی اگر بتوان خود همبستگی موجود در بین جملات اخلال را رفع کرد، می‌توان مجدداً از کمیت‌های بحرانی توزیع τبرای آزمون ریشه واحد استفاده کرد.

یکی از روش‌ها برای از بین بردن همبستگی پیاپی در بین حملات اخلال، اضافه کردن متغیر وابسته با وقفه در بین متغیرهای توضیح‌دهنده الگو به‌صورت زیر است:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \theta_1 \Delta y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + \theta_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t$$

که در آن ε_t نوفه سفید است. تعداد متغیرهای وابسته با وقفه را در الگو تا آنجا زیاد می‌کنیم که کمیت آماره دوربین-واتسون D.W. به اندازه کافی به عدد ۲ نزدیک شود. پس از رفع خودهمبستگی پیاپی می‌توان آزمون پایایی یا آزمون ریشه واحد را به‌صورت معمول به انجام رساند.

آزمون KPSS (Kpss Test)

روش آزمون ارائه‌شده توسط دیکی و فولر برای آزمون ناپایایی از توان آزمون بالایی برخوردار نیست. به همین جهت کوکاوسکی، فیلیپس، اشمیت و شین(Kwiatkowski D, P.C.B. Phillips, P. Schmidt and Y. Shin, 1992) روش جایگزینی را برای آزمون پایایی یک متغیر سری زمانی معرفی کرده‌اند که از توان مناسبی برخوردار است. این آزمون که به آزمون KPSS شهرت یافته است سری زمانی y_t را به‌صورت حاصل جمع سه جزء زیر در نظر می‌گیرد:

$$y_t = v_t + \beta t + u_t$$

که در آن u_t فرایند پایا (نه الزاماً نوفه سفید)، βt روند زمانی قطعی و v_t یک فرایند گام تصادفی به‌صورت زیر است:

$$v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_t^2)$$

در این روش برای آزمون پایایی متغیر سری زمانی، فرضیه صفر و فرضیه مقابل به‌صورت زیر تنظیم می‌شود:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_t^2 = 0 \\ H_1: \sigma_t^2 > 0 \end{cases}$$

اگر H_0درست باشد، یعنی $\sigma_t^2 = 0$ باشد، v_t یک مقدار ثابتی خواهد بود و درنتیجه y_t مربوط به رابطه $y_t = v_t + \beta t + u_t$ یک فرایند روند-پایا خواهد بود. درغیراین‌صورت، فرایند $\{y_t\}$ ناپایا است. آماره این آزمون که به‌صورت ضریب لاگرانژ است عبارت است از:

$$LM = \frac{\sum_{t-1}^{T} S_t^2}{\hat{\sigma}_e^2}$$

که در آن $\hat{\sigma}_e^2$ واریانس جملات پسماند یک رگرسیون کمکی است که براساس ساختار یک فرایند روند-پایا به‌صورت زیر تصریح و برآورد می‌شود.

$$y_t = \alpha + \beta t + e_t$$

S_t نیز براساس رابطه زیر محاسبه شده و مجذور آن در صورت کسر آماره آزمون ضریب لاگرانژفوق قرار می‌گیرد

$$S_t = \sum_{t=1}^{T} e_t$$

Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

اگر بخواهیم به جای آزمون روند-پایایی متغیر سری زمانی y_t، پایایی آن را مورد آزمون قرار دهیم، کافی است رگرسیون کمکی را به‌صورت زیر تصریح و برآورد کنیم.

$$y_t = \alpha + e_t$$

همانگونه که فرضیه مقابل H_1 نشان می‌دهد، آزمون *KPSS* یک آزمون یک دامنه است و ناحیه رد در دنباله راست توزیع قرار دارد. کمیت‌های بحرانی آزمون *KPSS* در جدول زیر آمده است.

فرضیه صفر	کمیت‌های بحرانی		
	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱۰
y_t پایا است	۰/۷۳۹	۰/۴۶۳	۰/۳۴۷
y_tروند-پایا است	۰/۲۱۶	۰/۱۴۶	۰/۱۱۹

کتاب‌شناسی

نوفرستی، محمد (۱۳۹۵). *ریشه واحد و همجمعی در اقتصادسنجی*، چاپ ششم، انتشارات رسا.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1979). "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association*, 74 (366).

Enders W. (2015). *Applied Econometric Time Series*, 4th Edition, John Wiley & Sons Ltd.

Hatanaka M. (2003). *Time Series Based Econometrics: Unit Roots and Cointegration*, Oxford University Press.

Kirchgassner G., J. Wallters and U. Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*, 2nd Edition, Springer.

Kwiatkowski D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin (1992). "Testing the Null Hypothesis of stationary against the Alternative of a Unit Root", *Journal of Econometrics*, 54.

Lutkepohl H. and M. Kratzig (2004). *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University press.

محمد نوفرستی

دانشکده اقتصاد، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

Encyclopedia of Economics

enceco.ihcs.ac.ir