

آزمون والد

پارامتر θ نشان می‌دهیم که نسبت احتمال ابتلا به سرطان در افراد سیگاری به احتمال ابتلا به سرطان در افراد غیرسیگاری است. پس اگر مقدار واقعی و مجهول θ بزرگ‌تر از یک باشد سیگارکشی خطر ابتلا به سرطان ریه را افزایش می‌دهد. در این مثال از آزمون والد برای آزمون فرضیه صفر $\theta = 1$ (یعنی نبود اثر سیگارکشی) استفاده می‌شود.

آزمون والد در مدل‌های آماری گوناگون از جمله مدل‌های مربوط به متغیرهای گسسته دوحالتی و چندحالتی و متغیرهای پیوسته می‌تواند به کار بسته شود (هارل، ۲۰۰۱: ۵۶).

روش اجرای آزمون والد

در حالت تک‌پارامتری برای انجام آزمون والد مبنی بر آزمون فرضیه صفر $\theta = \theta_0$ در مقابل فرضیه $\theta \neq \theta_0$ ابتدا برآورد حداکثر درستنمایی پارامتر θ از داده‌های نمونه به صورت $\hat{\theta}$ به دست آورده می‌شود. سپس تفاوت مقدار برآوردشده و مقدار مفروض در فرضیه صفر ($\theta - \hat{\theta}$) در قیاس با خطای معیار $\hat{\theta}$ (که با $SE(\hat{\theta})$ نشان داده می‌شود) سنجیده می‌شود. برآوردی معقول از خطای معیار $\hat{\theta}$ از وارون جذر مقدار اطلاع فشر به ازای θ به دست آورده می‌شود که عبارت است از:

$$SE(\hat{\theta}) = [I_n(\hat{\theta})]^{-1/2}$$

از آنجاکه برای نمونه‌های به نسبت بزرگ برآورد حداکثر درستنمایی تقریباً دارای توزیع نرمال است، آماره والد $W = (\hat{\theta} - \theta_0) / SE(\hat{\theta}) = [I_n(\hat{\theta})]^{1/2} (\hat{\theta} - \theta_0)$

دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد بود و می‌تواند برای آزمون معقول بودن θ_0 به جای $\hat{\theta}$ در پرتو اطلاعات نمونه به کار رود. صورتی معادل از آماره والد عبارت است از:

$$W^* = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 I_n(\hat{\theta})$$

این آماره به شرط درست بودن فرضیه صفر دارای توزیع خی‌دو با یک درجه آزادی است. مقدارهای بزرگ آن بیانگر

آزمون والد از ابداعات آمارشناس مشهور آبراهام والد (1950-1902) است که کاربردهای فراوان دارد. آزمون والد یک آزمون آماری پارامتری است که برای ارزیابی درستی فرضیه یا فرضیه‌هایی درباره یک پارامتر θ یا برداری از پارامترها θ به کار می‌رود.

هرگاه قانون حاکم بر اقلام داده‌های یک نمونه را بتوان به صورت یک مدل آماری شامل پارامترهایی مجهول بیان کرد، باید پارامترها از روی نمونه برآورد شوند. آزمون والد برای آزمون مقدار واقعی پارامتر بر پایه برآوردی از آن از داده‌های نمونه به کار گرفته می‌شود. فرض کنید اقتصاددانی داده‌هایی را درخصوص طبقه اجتماعی و میزان پس‌انداز (به صورت درصدی از درآمد قابل تصرف) در نمونه‌ای از جامعه‌ای مشخص در اختیار دارد. وی می‌خواهد بداند که رابطه بین میزان پس‌انداز و طبقه اجتماعی در این جامعه چگونه است و در اصل رابطه‌ای بین این دو متغیر وجود دارد یا نه. گیریم پارامتر θ تفاوت میانگین‌های میزان پس‌انداز را برای افراد طبقه بالا و طبقه متوسط نشان دهد. آن‌گاه برای آزمون نبود تفاوت بین این دو طبقه اجتماعی از لحاظ میزان پس‌انداز، می‌توان از آزمون والد برای آزمون فرضیه صفر $\theta = 0$ استفاده کرد. در صورت رد نشدن این فرضیه صفر می‌توان گفت که طبقه اجتماعی در میزان پس‌انداز نقشی ندارد. در این چیدمان مقدار واقعی پارامتر θ بر اقتصاددان مجهول است. وی می‌تواند برآوردی از آن را از تفاوت میانگین‌های نمونه‌ای درآمد افراد متعلق به طبقه بالا و درآمد افراد متعلق به طبقه متوسط برآورد کند. در آزمون والد از این برآورد و برآوردی از ملاک تغییرات تصادفی آن (که در زیر توضیح داده خواهد شد) برای نتیجه‌گیری درباره مقدار مشاهده‌نشده θ استفاده می‌شود. در کاربردی دیگر فرض کنید پزشکی می‌خواهد بداند که سیگار کشیدن خطر ابتلا به سرطان ریه را افزایش می‌دهد یا نه. در این مثال افزایش خطر را با

نادرستی فرضیه صفرند.

در مسئله‌هایی که با بردار پارامتر θ سر و کار داریم، آماره W^* به صورت یک فرم درجه دوم درمی‌آید:

$$W^* = (\hat{\theta} - \theta_0)^T I_n(\hat{\theta}) (\hat{\theta} - \theta_0)$$

در این فرمول، T به معنای برگردان بردار ستونی به بردار سطری و $I_n(\hat{\theta})$ ماتریس اطلاع فیشر است. آماره W^* نیز دارای توزیع خی‌دو اما درجه آزادی آن برابر با بُعد θ است. آزمون نسبت درستنمایی بدیلی برای آزمون والد است. از آنجاکه این دو آزمون به‌طور مجانبی (برای نمونه‌های بسیار بزرگ) معادل‌اند، اغلب به نتیجه‌گیری‌های مشابه می‌انجامند اما در نمونه‌های کوچک می‌توانند نتیجه‌های متفاوت داشته باشند.

چند دلیل برای برتری آزمون نسبت درستنمایی بر آزمون والد ارائه شده‌اند. نخست آنکه با توجه به چگونگی فرمول‌بندی پرسش پژوهش، آزمون والد می‌تواند پاسخ‌های متفاوت بدهد (فی‌یرز و همکاران، ۱۹۹۶: ۱۴۵). برای مثال، درخصوص افزایش خطر ابتلا به سرطان ریه بر اثر سیگارکشی فرضیه $\theta = 1$ معادل فرضیه $\log(\theta) = 0$ است. اما آماره آزمون برای آن دو یکسان نیست زیرا رابطه روشنی بین خطای معیار θ و خطای معیار $\log(\theta)$ وجود ندارد. درحالی‌که روش آزمون نسبت درستنمایی جواب دقیقاً یکسانی به دو فرمول‌بندی بالا می‌دهد. در این مسئله خاص و در حالت کلی به هر تبدیل یکنوا (کاهشی یا افزایشی) از θ جواب بی‌تغییر باقی می‌ماند. دلیل دیگر آن است که آزمون والد شامل دو تقریب است. یکی اینکه از برآورد خطای معیار $SE(\hat{\theta})$ به جای انحراف معیار و دوم اینکه، از توزیع تقریبی W^* (خی‌دو) استفاده می‌کند، درحالی‌که آزمون نسبت درستنمایی از یک تقریب مبنی بر اینکه توزیع آماره آزمون خی‌دو است، استفاده می‌کند.

آزمون امتیاز بدیلی دیگر برای آزمون والد است. این آزمون

این مزیت را دارد که می‌تواند در وضعیت‌هایی که برآورد کردن تغییرپذیری مشکل است نیز فرمول‌بندی شود (آگرستی، ۲۰۰۲: ۱۱۲).

در انگل (۱۹۸۳: ۲۳۵) نشان داده شده است که سه آزمون والد، نسبت درستنمایی و ضریب لاگرانژ (که به نام آزمون امتیاز نیز شناخته می‌شود) به‌طور مجانبی معادل‌اند.

کتاب‌شناسی

- Harrel, Frank E. Jr. (200). *Regression Modeling Strategies*, New York, Springer-Verlag.
- Fears, Thomas R., Benichom, Jacques, and Gail, Mitchell H. (1996). A Reminder of Fallibility of the Wald Statistic. *The American Statistician*, 50 (3), pp. 226-227.
- Agresti, Alan (2002). *Categorical Data Analysis (2n ed.)*. New York, Wiley.
- Engle, Robert F. (1983). Wald, Likelihood Ratio, and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics.
- in Intriligator, M. D. and Griliches, Z., *Handbook of Econometrics. II*. Elsevier. pp. 796-801.

محمدرضا مشکانی

هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی