

خوبی برازش

Goodness of fit

خوبی برازش به این مفهوم است که متغیرهای توضیحی لحاظ شده در الگو به چه میزان قادر به توضیح دهنده‌گی نوسانات و تغییرات متغیر وابسته هستند. برای این امر لازم است معیارهای توضیح دهنده دقت برازش شناسایی شوند. از جمله آن‌ها می‌توان به ضریب تعیین (R^2)، ضریب تعیین تعدیل شده ($\bar{R}^2$)، معیار آکائیک (AIC)، معیار شوارز-بیزین (SIC) و معیار بیزین (BIC) اشاره کرد. این معیارها اطلاعاتی در زمینه اینکه تا چه حد معادلات به دست آمده رفتار متغیر وابسته را نشان می‌دهد، ارائه خواهد داد. همچنین، هدف تمام این معیارها به حداقل رساندن مجموع مربعات خطا (Residual Sum of Squares) است.

ضریب تعیین (R^2)

ضریب تعیین R^2 به عنوان معمول‌ترین معیار خوبی برازش خط رگرسیون برابر با نسبت تغییرات توضیح داده شده (ESS) به کل تغییرات است و نشان می‌دهد که معادله برآوردی چند درصد از تغییرات متغیر وابسته را توضیح خواهد داد. این تغییرات بر مبنای انحراف از میانگین تعریف می‌شود که بیانگر آن است که رگرسیون تا چه اندازه می‌تواند داده‌ها را به صورت دقیق برازش کند (سوری، ۱۳۹۷: ۱۸۵ و ۲۴۰؛ آستریو و جیها، ۱۳۹۳: ۶۶)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (1)$$

که در آن N تعداد مشاهدات کل در الگو، y متغیر وابسته، $\bar{y}$ به ترتیب مقادیر میانگین و پیش‌بینی شده به وسیله الگوست.

از جمله ویژگی‌های مهم ضریب تعیین آن است که تابعی غیرنزولی از تعداد متغیرهای توضیحی موجود در الگو،

کمیتی غیرمنفی و مقداری بین صفر و یک است (Gujarati, 2004: 84؛ عباسی‌نژاد، ۱۳۹۵: ۵۱). هر چه ضریب تعیین به یک نزدیک‌تر باشد، برازش الگو بهتر است. همچنین یک رابطه مفهومی میان ضریب تعیین و آماره آزمون F آنالیز واریانس وجود دارد. به طوری که تغییرات هر دو آزمون هم‌جهت است. بر این اساس، اگر R^2 معادل صفر باشد، F نیز صفر خواهد شد. با افزایش ضریب تعیین، مقدار آماره F نیز افزایش خواهد یافت. به طوری که اگر R^2 معادل یک باشد، F نیز بی‌نهایت خواهد بود. لذا، آماره F نه تنها به عنوان معیار معناداری رگرسیون برآورد شده، بلکه آزمونی برای معناداری R^2 است. در این زمینه مزیت بیان آزمون F بر حسب معیار ضریب تعیین، سادگی محاسبه آن است (Gujarati, 2004: 258-259).

گفتنی است، هنگامی که ضریب تعیین برای ارزیابی عملکرد یک رگرسیون استفاده می‌شود ممکن است یک سری مشکلات جدی ایجاد کند که عبارتند از: (۱) مشکل رگرسیون کاذب (وجود R^2 بالا در خصوص داده‌های نایستا یا دارای روند). (۲) همبستگی بالای متغیرهای توضیحی با متغیر دیگر. (۳) ارجحیت معادله سری زمانی در مقابل معادلات مقطعی (معادلات سری زمانی R^2 بالاتری در مقایسه با معادلات مقطعی ایجاد می‌کند). (۴) تصمیم‌گیری نادرست در خصوص انتخاب متغیر توضیحی. در برخی مواقع R^2 پایین به معنی انتخاب اشتباه متغیر توضیحی نیست. چرا که ممکن است فرم تبعی انتخاب شده برای الگو نامناسب باشد. (۵) R^2 های ایجاد شده از معادلاتی که متغیر وابسته متفاوتی دارند، قابل مقایسه نیستند (آستریو و جیها، ۱۳۹۳: ۶۷-۶۷).

همچنین، ضریب تعیین دارای دو نقطه ضعف اساسی است. اول اینکه در صورت یکسان نبودن تعداد و تشابه متغیرهای توضیحی، نمی‌توان از R^2 جهت مقایسه برآورد رگرسیون الگوها استفاده کرد. دومین نقطه ضعف این است

که با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی به الگو به علت کاهش مجذورات پسماند، R^2 به طور یکنواختی افزایش خواهد یافت. لذا، انگیزه افزودن متغیرهای جدید، صرف نظر از اهمیت داشتن آن‌ها در موضوع مورد بررسی، همواره وجود خواهد داشت (صادقی شاهدانی و اشرف زاده، ۱۳۹۶: ۲۵۱؛ قنبری و رسولی، ۱۳۹۱: ۳۰). بر این اساس، در مقایسه دو الگوی رگرسیون با متغیر وابسته همانند و تعداد متغیرهای توضیحی متفاوت، انتخاب الگویی با ضریب تعیین بالاتر صحیح به نظر نمی آید (عرب مازار، ۱۳۶۹: ۱۱۳). لذا به منظور کسب اطلاعات دقیقتر از رگرسیون، معمولاً از ابزار سنجش دیگری برای تعیین میزان خوبی برازش با نام ضریب تعیین تعدیل شده، می توان استفاده کرد.

ضریب تعیین تعدیل شده (Adjusted R-Square)

همانطور که در بخش پیش مطرح شد، R^2 نمی تواند به عنوان ابزاری برای مقایسه دو رگرسیون گوناگون که شامل تعداد متفاوتی از متغیرهای توضیحی هستند، مورد استفاده قرار گیرد. لذا، نیاز به معیار متفاوتی است که برای مقایسه، تعداد متغیرهای توضیحی وارد شده به هر الگو نیز در نظر گرفته شود. این معیار ضریب تعیین تعدیل شده نامیده می شود زیرا تعداد رگرسیونهای وارد شده در الگوی رگرسیون (یا برای درجات آزادی) تعدیل شده است. بر این اساس، افزایش تعداد متغیرهای توضیحی منجر به کاهش مجموع مربعات خطا (RSS) خواهد شد. بنابراین، معیار $\bar{R}^2$ ، یک معیار مناسب تری برای مقایسه معادلات گوناگون است که بر اساس آن، معیار انتخاب یک الگوی بهتر آن است که با اضافه کردن یک متغیر جدید به الگو، $\bar{R}^2$ افزایش یابد (آستریو و جیها، ۱۳۹۳: ۱۰۰-۱۰۱).

از جمله ویژگی های ضریب تعیین تعدیل یافته آن است که برای یک الگوی با بیش از یک متغیر، ضریب تعیین

تعدیل شده از R^2 کوچکتر است. این بدان معناست که با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی، $\bar{R}^2$ کمتر از R^2 ، افزایش می یابد. همچنین مقادیر $\bar{R}^2$ برخلاف R^2 ، می تواند منفی نیز باشد که بیانگر آن است که الگو در فرایند تولید اطلاعات به خوبی عمل نکرده است (صادقی شاهدانی و اشرف زاده، ۱۳۹۶: ۲۵۱-۲۵۲؛ عرب مازار، ۱۳۶۹: ۱۱۴؛ Gujarati, 2004: 218). گفتنی است میان t ضرایب و آزمون F و $\bar{R}^2$ ، رابطه ای وجود دارد. اگر قدر مطلق آماره t برای ضریب رگرسیون کمتر از یک باشد، در نتیجه حذف آن متغیر از الگو، $\bar{R}^2$ افزایش خواهد یافت (عباسی نژاد، ۱۳۹۵: ۵۳؛ صادقی شاهدانی و اشرف زاده، ۱۳۹۶: ۲۵۷). همچنین، اگر قدر مطلق آماره t و F بزرگتر از یک باشد، آن گاه ورود متغیر جدید منجر به افزایش $\bar{R}^2$ خواهد شد (سوری، ۱۳۹۷: ۱۸۵؛ Gujarati, 2004: 537).

لازم است به این نکته توجه شود که در مقایسه دو الگو بر اساس ضرایب تعیین $\bar{R}^2$ ، اگرچه متغیرهای توضیحی می تواند در الگو متفاوت باشند، اما متغیر وابسته باید یکسان باشد. همچنین، در تحلیل رگرسیون به این نکته باید توجه شود که هدف از برآورد، تنها به دست آوردن یک مقدار بزرگ برای R^2 نیست بلکه مهم تر آن است که بتوان برآوردهای قابل اطمینان برای ضرایب رگرسیون واقعی جامعه و استنباط آماری در خصوص آن‌ها انجام داد (عرب مازار، ۱۳۶۹: ۱۱۴-۱۱۵).

در مجموع برای انتخاب و مقایسه الگوها استفاده از $\bar{R}^2$ مناسب تر از R^2 است. چرا که در شرایط کم بودن متغیرهای توضیحی نسبت به مشاهدات، ضریب تعیین تعدیل شده تصویر خوش بینانه تری از برازش رگرسیون را نشان می دهد (Theil, 1971: 605-606).

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[\frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - k - 1} \right] \quad (2)$$

که در آن، k تعداد پارامترها است.

معیارهای اطلاعات (information Criterion)

سؤالی که به طور طبیعی پس از تخمین هر الگویی مطرح می شود این است که الگوی برآورد شده تا چه حد بر داده های واقعی منطبق است. اضافه کردن وقفه ها به یک الگو، ضمن اینکه موجب کاهش مجموع مجذور پسماندهای تخمین زده می شود، بلکه به طور همزمان موجب تخمین ضرایب اضافی و کاهش درجه اطمینان خواهد شد. علاوه بر آن، لحاظ ضرایب اضافی در الگو، قدرت پیش بینی را نیز کاهش خواهد داد (اندرس، ۱۳۸۶: ۱۵۴). در این میان، معیار اطلاعات نفع و ضرر حاصل از افزودن یک یا چند متغیر را لحاظ می کند. بدین معنی که هم نفع حاصل از کاهش مجموع مربعات خطا (RSS) و هم زیان حاصل از کاهش درجه آزادی را در نظر می گیرند. اگر افزودن یک متغیر باعث کاهش معیار اطلاعات نشود، باید از الگو حذف شود. در حالت ایده آل الگویی مناسب به نظر می رسد که در مقایسه با الگوهای جایگزین، دارای مقادیر کمتری برای این معیارها است. همچنین، معیارهای مذکور در مباحث مرتبط با سری های زمانی برای تعیین وقفه های بهینه دارای کاربرد بسیاری است (سوری، ۱۳۹۷: ۱۹۲-۱۹۳؛ آستریو و جیهال، ۱۳۹۳: ۱۰۲). بنابراین، هریک از این معیارها میان خوبی برازش و سادگی الگو به دنبال یک راه حل بهینه هستند. برازش برحسب مقدار حداکثر تابع درست نمایی اندازه گیری و سادگی الگو برحسب تعداد پارامترهای برآورد شده، تعیین می شود. تفاوت میان معیارهای اطلاعات، اهمیتی است که هریک از آنها به کاهش تعداد پارامترهای الگو می دهد (ابریشمی و مهرآرا، ۱۳۸۸: ۱۲۳). از جمله این معیارها می توان به معیار اطلاعات آکائیک (AIC)، معیار شوارز-بیزین (SBC) و معیار اطلاعات بیزین (BIC) اشاره کرد. معیار SBC سازگار (در نمونه های بزرگ، منتهی به انتخاب

الگوی صحیح می شود) است و بر اساس آن ساده ترین الگو (الگو با کمترین پارامتر برآورد شده) انتخاب می شود. اما معیار AIC، کمترین اهمیت را به سادگی الگو می دهد و خاصیت سازگاری در مورد آن وجود ندارد. اما این موضوع به این مفهوم نیست که سایر معیارها بر معیار AIC مرجح است (ابریشمی و مهرآرا، ۱۳۸۸: ۱۲۵). در این زمینه لازم به ذکر است، اگرچه ممکن است معیارهای مختلف نتایج متفاوتی را ارائه دهد، اما الگویی مناسب تر است که در مقایسه با سایر الگوها، در چندین معیار نتایج خوبی به دست آورد (صادقی شاهدانی و اشرف زاده، ۱۳۹۶: ۲۵۵).

معیار اطلاعات آکائیک (Akaike information Criterion)

معیار اطلاعات آکائیک، که در سال ۱۹۷۴ میلادی به وسیله آکائیک بسط داده شده است، برای ارزیابی خوبی برازش الگو در شرایط تغییر در تعداد متغیرهای توضیحی مورد استفاده قرار می گیرد. معیار مذکور در تحلیل های سری زمانی دارای کاربرد زیادی است (آستریو و جیهال، ۱۳۹۳: ۱۰۲-۱۰۱). بر اساس معیار AIC، الگویی مناسب است که دارای کمترین میزان این آماره باشد (ابریشمی و مهرآرا، ۱۳۸۸: ۱۲۳). معیار AIC جریمه بیشتری نسبت به R^2 را برای افزودن رگرسورهای بیشتر اعمال می کند. یکی از مزایای AIC این است که نه تنها در پیش بینی عملکرد درون نمونه ای (in-sample)، بلکه بر پایه اطلاعات برون نمونه ای (out of-sample) نیز مفید است. همچنین، برای هر دو الگوی مقید و نامقید نیز کاربرد دارد. علاوه بر آن، برای تعیین طول وقفه های بهینه در الگوهای خودرگرسیون (Autoregressive) نیز می توان از آن استفاده کرد (Gujarati, 2004, p.537). گفتنی است معیار مذکور در نمونه های کوچک دارای کارکرد بهتری در مقایسه با معیار

SBC است. همچنین، با توجه به اینکه AIC الگویی را انتخاب می‌کند که دارای متغیرهای توضیحی بیشتری است، لذا، باید آماره t همه ضرایب الگو نیز سطح قابل قبولی داشته باشد (اندرس، ۱۳۸۶: ۲۴۴ و ۱۵۶).

$$AIC = N \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2K \quad (۳)$$

که در آن $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ واریانس نمونه پسماند است.

معیار اطلاعات بیزین (Bayesian Information Criterion)

با توجه به اینکه معیار AIC مرتبه خودهمبسته الگو را بیش از مقدار واقعی تعیین می‌کند، به همین دلیل آکائیک معیار دیگری به نام معیار اطلاعات بیزین (BIC) ارائه کرد. بر اساس معیار اخیر، میزان زیاده‌گویی در مرتبه خودهمبستگی الگو کاهش خواهد یافت (ابریشمی و مهرآرا، ۱۳۸۸: ۱۲۴). محبوبیت این معیار ناشی از سادگی محاسباتی و عملکرد مؤثر در بسیاری از مدل‌سازی‌ها حاصل است.

بر اساس این معیار نیز، الگویی مناسب است که دارای کمترین میزان این آماره باشد. در معیار BIC برای تعداد پارامترها جریمه کمتری در مقایسه با AIC لحاظ می‌شود. بر این اساس، برنامه و اندرسون (۲۰۱۱) استدلال‌های نظری را در حمایت از AIC ارائه دادند. همچنین، در مورد تجزیه و تحلیل رگرسیون چندمتغیره، یانگ (۲۰۰۵) نشان داد که معیار AIC در مقایسه با BIC برای گزینش بهترین الگو مناسبتر است (Fabozzi et al, 2014: 402-403).

$$BIC = N \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) - (N - K) \ln(1 - k/N) + k \ln N \left[\left(\frac{\hat{\sigma}_y^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} - 1 \right) / k \right] \quad (۴)$$

که در آن $\hat{\sigma}_y^2$ واریانس نمونه سری است.

معیار شوارز - بیزین (Schwarz Bayesian Criterion)

شوارز در سال ۱۹۷۸ معیاری مشابه معیار بیزین را ارائه کرده است که به معیار شوارز بیزین معروف است (ابریشمی و مهرآرا، ۱۳۸۸: ۱۲۴). این معیار نیز یکی دیگر از معیارهای انتخاب الگو مبتنی بر نظریه اطلاعات است. که به‌ازای ورود پارامتر جدید جریمه بیشتری را در مقایسه با AIC به‌دنبال دارد. به همین دلیل بر اساس این معیار، الگوهایی انتخاب می‌شود که در آن اصل صرفه‌جویی رعایت شده است. به عبارت دیگر، زمان استفاده از معیار SBC، هزینه نهایی اضافه کردن یک متغیر به الگو بیش از معیار آکائیک است. علاوه بر این، معیار شوارز - بیزین مجانباً سازگار است اما معیار AIC به سمت انتخاب الگوهایی که بیش از حد پارامتر دارند، تورش دارد. با این حال معیار SBC با نمونه‌های بزرگ بیشتر سازگار است. با توجه به اینکه این معیار مانند ACI می‌تواند منفی نیز باشد، لذا هرچه به سمت منفی بی‌نهایت میل کند، برازش الگو مناسب‌تر است. از آنجا که معیار SBC در انتخاب وقفه‌ها صرفه‌جویی می‌کند لازم است پس از استفاده از این معیار، نوفه سفید بودن (White Noise) پسماندها نیز مورد آزمون قرار گیرد (اندرس، ۱۳۸۶: ۱۵۶ و ۲۴۴).

$$SBC = N \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + K \ln N \quad (۵)$$

کتاب‌شناسی

- آستریو، د.، هالا، س.ج. (۱۳۹۳). *اقتصادسنجی کاربردی: رهیافتی مدرن با استفاده از EViews و Microfit*. (علیرضا کرباسی، حسین محمدی، آزاده تعالی مقدم، مترجم). مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد.
- ابریشمی، ح.، مهرآرا، م. (۱۳۸۸). *اقتصادسنجی کاربردی (رویکردهای نوین)*. تهران: دانشگاه تهران.
- اندرس، و. (۱۳۸۶). *اقتصادسنجی سری‌های زمانی با رویکرد کاربردی*. مهدی صادقی و سعید شوال پور، مترجم). تهران: دانشگاه اما صادق (ع).
- سوری، ع. (۱۳۹۷). *اقتصادسنجی ۱: مقدماتی همراه با کاربرد Eviews 8 و Stata 12*. تهران: فرهنگ‌شناسی.

صادقی شاهدانی، م.، اشرف زاده، ع. (۱۳۹۶). اقتصادسنجی عمومی. تهران: دانشگاه امام صادق(ع).

عرب‌مازار، ع. (۱۳۶۹). اقتصادسنجی عمومی. تهران: کویر.

عباسی نژاد، ح. (۱۳۹۵). اقتصادسنجی (مبانی و روشها). تهران: دانشگاه تهران.

قنبری، ع. و رسولی، ا. (۱۳۹۱). اقتصاد سنجی. تهران: چالش

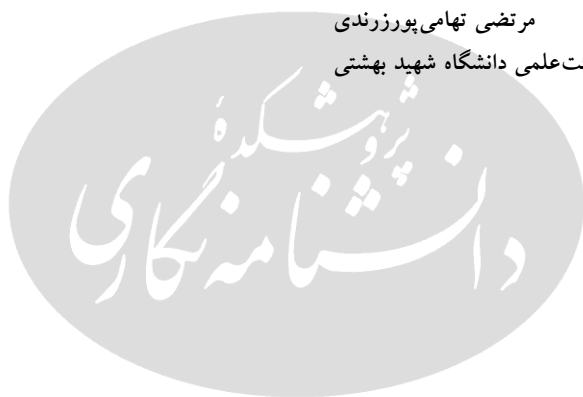
Fabozzi, f. J., Focardi, S.M., Rachev, S.T., Arshanapalli, B. G. (2014). The Basics of Financial Econometrics: Tools, Concepts, and Asset Management Applications, Published by John Wiley & Sons, Inc.

Gujarati, D.N. (2004). Basic Econometrics. 4th Edition, McGraw-Hill Companies.

Theil, H. (1971). Principles of Econometrics, John Wiley & Sons, New York.

مرتضی تهامی پورزند

هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



دانشگاه اقتصاد