

تابع هامیلتونی

(۱)

$$H_t = e^{-\rho t} u(c_t) + \mu_t [f(k_t) - c_t - nk_t]$$

که در آن μ_t متغیر هم‌وضعیت است و برابر ارزش نهایی یک واحد اضافی سرمایه در زمان t است که بر اساس زمان صفر محاسبه می‌شود. از نظر کاربردی به جای استفاده از ارزش نهایی بر اساس زمان صفر، از ارزش نهایی یک واحد اضافی سرمایه زمان t بر اساس زمان t ، $\lambda_t \equiv \mu_t \exp(\rho t)$ استفاده شود. λ_t نیز ضریب لاگرانژ است. با استفاده از حداکثرسازی شرایط مرتبه اول نسبت به متغیر کنترل و متغیر وضعیت به صورت روابط زیر حاصل می‌شوند:

(۲)

$$H_c = 0 \Rightarrow e^{-\rho t} u'(c_t) - \mu_t = 0$$

(۳)

$$H_k = -\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t}$$

اگر تابع هامیلتون نسبت به $\{c, k\}$ مقعر باشد، شروط فوق منجر به مسئله حداکثرسازی می‌شود (پورکاظمی، ۱۳۹۳: ۴۰۲). شرط تراگردی (Transversality condition) نیز به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

(۴)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t \mu_t = 0$$

با استفاده از روابط (۲) و (۳)، و جای‌گذاری رابطه $\lambda_t e^{-\rho t}$ به جای μ_t ، مسیر بهینه مصرف حاصل می‌شود (بلانچارد و فیشتر، ۱۳۷۶: ۸۲).

(۵)

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \delta [f'(k_t) - \rho - n]$$

که در آن $\delta = -u'(c_t) / c_t u''(c_t)$ کشش جانشینی بین دوره‌ای مصرف است. این معادله دیفرانسیلی به معادله

Hamiltonian Function

تابع هامیلتونی که در نظریه کنترل بهینه کاربرد دارد به وسیله پتريگین ابداع شده و به دنبال یافتن بهترین مقدار قابل دستیابی از یک تابع هدف تعریف شده بر یک دامنه معین از مقادیر است.

تعیین مسیر زمانی بهینه برای متغیر کنترل (Control variable) مهم‌ترین هدف نظریه کنترل بهینه است. با بهینه شدن مسیر زمانی متغیر کنترل، مسیر متغیر وضعیت نیز بهینه خواهد شد. مهم‌ترین نتیجه در نظریه کنترل بهینه نیز به دست آوردن شرایط مرتبه اول (FOC) مسئله حداکثرسازی است. در اقتصادهای متمرکز برنامه‌ریز مرکزی به دنبال حداکثر کردن تابع رفاه اجتماعی با توجه به محدودیت بودجه خانوار نماینده است. بر اساس محدودیت بودجه خانوار، در هر لحظه از زمان خانوار نماینده بخشی از درآمد خود را مصرف و بخشی را به موجودی سرمایه اضافه می‌کند. بنابراین، مسئله حداکثرسازی به صورت رابطه زیر خواهد بود (بلانچارد و فیشتر، ۱۳۷۶: ۸۰):

(۱)

$$\max_c V = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.t. } \dot{y}_t = c_t + k_t + nk_t$$

که در آن تابع $u(\cdot)$ تابع مطلوبیت آنی به صورت تابعی غیرمنفی، مقعر و صعودی نسبت به مصرف است. C مصرف سرانه، k موجودی سرمایه سرانه، y تولید سرانه و n نرخ رشد جمعیت است. ρ نرخ ربحان زمانی است و فرض می‌شود که اکیداً مثبت است. t نیز زمان است. وسیله‌ای که از طریق آن متغیر هم‌وضعیت (co-state variable) وارد مسئله کنترل بهینه می‌شود و نقش مهمی در فرایند حل دارد، تابع هامیلتون (Hamiltonian Function) است و به صورت رابطه زیر تشکیل می‌شود (سوری، ۱۳۸۶: ۳۴۷):

تابع هامیلتونی

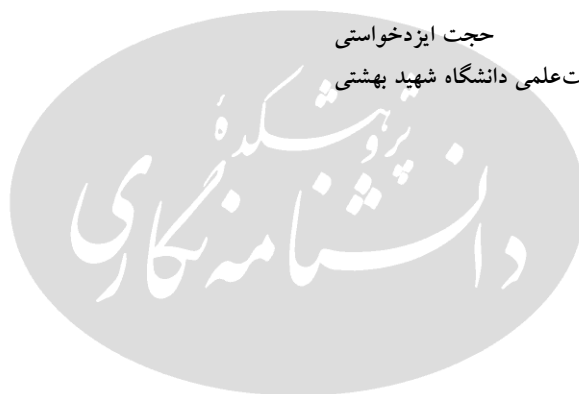
اولر معروف است و شرط لازم برای قرار گرفتن در مسیر بهینه است (همان).

کتاب‌شناسی

بلانچارد، اولیورجین و فیشر، استنلی (۱۳۷۶). *درس‌هایی در اقتصاد کلان*، ترجمه محمود ختائی و تیمور محمدی، جلد اول: انتشارات سازمان برنامه و بودجه
پورکاظمی، محمدحسین (۱۳۹۳). *بهینه‌سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن*، تهران: انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.
سوری، علی (۱۳۸۶). *اقتصاد ریاضی: روش‌ها و کاربردها*، چاپ اول: انتشارات سمت.

حجت ایزدخواستی

هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



دانشگاه اقتصاد و آمار