توابع و انواع آن

Functions and Its Types

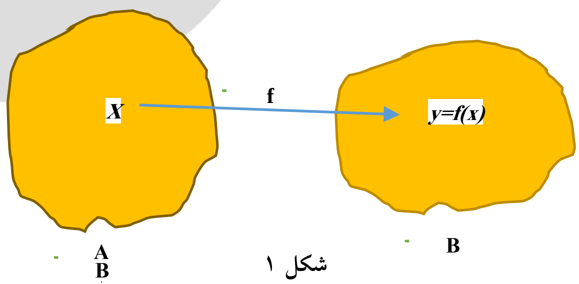
توابع و روابط

امروزه تابع را با استفاده از مجموعه‌ها تعریف می‌کنند، تعریف قدیمی آن چنین است: اگر x به دلخواه مقادیر بازه $[a,b]$ را اختیار کند، x را متغیر مستقل گویند، متغیر بدان‌جهت که x در فاصله a و b تغییر می‌کند، مستقل به‌دلیل آنکه به دلخواه تغییر می‌نماید.

دو مجموعه، A با عناصر x و مجموعه B با عناصر y درنظر گرفته، اگر طبق قانونی به هر عنصر x یک عنصر y از مجموعه B نظیر شود، در این صورت گویند تابعی از A در B تعریف شده است. اگر این تابع را به f نشان دهیم می‌نویسند؛

$$f : A \to B \tag{۱}$$

و می‌خوانند f تابعی است از A به B. شکل شمائی تابع در شکل ۱ را ملاحظه کنید.



شکل ۱

اگر قانون خاصی که عناصر x را به y نظیر می‌نماید را به بتوان به‌صورت یک معادله ریاضی نشان داد، مثلاً $y = f(x)$ یا $f(x,y) = o$ آنگاه این روابط را ضابطه یا معادله تابع گویند.

تابع f مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب به‌صورت زیر است:

$$f = \{(x,y) | x \in A, y \in B, y = f(x)\} \tag{۲}$$

تعریف دوم تابع، به کمک رابطه

مجموعه A با عناصر x و مجموعه B با عناصر y مفروض‌اند، $A \times B$ حاصلضرب کارتزین دو مجموعه، زوج‌های مرتبی به‌صورت زیراست:

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B, \} \tag{۳}$$

هر زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ را رابطه‌ای از A در B خوانند.

تابع رابطه‌ای است که در آن نتوان دو زوج مرتب پیدا کرد، به‌طوری که مختص اول آن مساوی، ولی مختص دوم آن نامساوی باشد، پس تابع حالتی خاصی از رابطه است. با این تعریف روشن است، که هر تابع یک رابطه است، ولی هر رابطه یک تابع نیست.

چند رابطهٔ خاص

اگر A یک مجموعهٔ دلخواه باشد، $A \times A = A^2$ را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم $f \subseteq A^2$، پس f رابطه‌ای است از A در A، اصطلاحاً گویند، f رابطه‌ای است در A حال به چند حالت خاص از رابطه در A توجه کنید؛

رابطهٔ انعکاسی: بنابه تعریف f را در A انعکاسی گویند، اگر

$$\forall a \in A \Rightarrow (a,a) \in f \tag{۴}$$

رابطهٔ متقارن: بنابه تعریف f را در A متقارن خوانند، اگر

$$\forall (a,b) \in f \Rightarrow (b,a) \in f \tag{۵}$$

رابطهٔ متعدی: بنابه تعریف f را در A متعدی نامند، اگر

$$\forall (a,b) \in f , \forall (b,c) \in f \Rightarrow (a,c) \in f \tag{۶}$$

رابطهٔ هم‌ارزی: f را در مجموعهٔ A رابطهٔ هم‌ارزی گویند، اگر f در A انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

انواع توابع

در این بخش به معرفی برخی از توابع می‌پردازیم.

تابع همانی

اگر f تابعی از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ باشد، به‌طوری‌که:

$$\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = x$$

در این صورت f را تابع همانی نامند. درواقع تابع همانی هر عدد x را در دامنهٔ آن به x بدل می‌کند. به‌عبارت‌دیگر تابع

همانی به‌صورت زیر است:

$$f=\{(x,y):y=x, x\in D_f\} \qquad (۷)$$

توجه کنید، درصورتی‌که $D_f=\mathbb{R}$، تابع همانی همان نیمساز ربع اول و سوم است.

تابع چندجمله‌ای صحیح

تابع $f:R\to R$ به معادلهٔ

$$y=f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n \qquad (۸)$$

که در آن $a_i\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$، را تابع چندجمله‌ای صحیح در $\mathbb{R}$ نامند، و $D_f=\mathbb{R}$.

تابع کسری گویا

تابع $f:R\to R$ به معادلهٔ

$$y=\frac{g(x)}{h(x)} \qquad (۹)$$

که در آن $g(x)$ و $h(x)$ دو چند جمله‌ای صحیح‌اند، تابع کسری گویاست. دامنهٔ این تابع به‌صورت زیر است:

$$D_f=\{x:x\in\mathbb{R}, h(x)\neq 0\}$$

برد این توابع کاملاً به معادله تابع بستگی دارد.

تناظر یک‌به‌یک

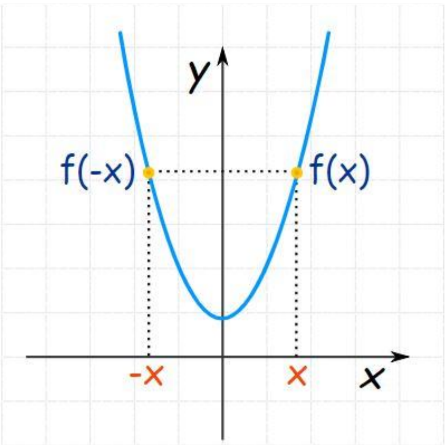
فرض کنید f تابعی از A در B باشد، f را یک تناظر یک‌به‌یک از A در B گویند، اگر اولاً، f یک‌به‌یک؛ ثانیاً، f پوششی، یعنی $R_f=B$؛ ثالثاً، $D_f=A$ باشد.

تابع زوج

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به معادلهٔ $y=f(x)$ را تابع زوج گویند، اگر و فقط اگر

$$\forall x\in D_f \Rightarrow f(-x)=f(x) \qquad (۱۰)$$

اگر تابعی زوج باشد، شکل f نسبت به محور yها قرینه است، زیرا دو نقطهٔ $(-x,f(-x))$ و $(x,f(x))$، باتوجه‌به تساوی $f(-x)=f(x)$، نسبت به محور yها قرینه‌اند شکل ۲ ببینید.



شکل ۲.

تابع فرد

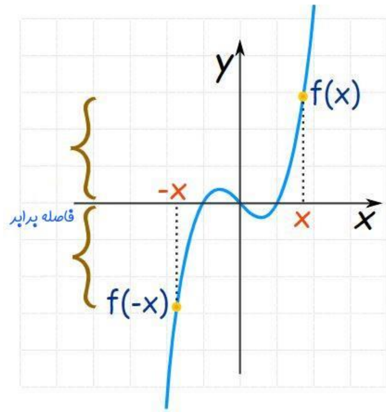
تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به معادلهٔ $y=f(x)$ تابعی است فرد، اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\forall x\in D_f \Rightarrow f(-x)=-f(x) \qquad (۱۱)$$

اگر تابعی فرد با شد، مبدأ مختصات مرکز تقارن آن ا ست، زیرا دو نقطهٔ $M'(-x,f(-x))$ و $M(x,f(x))$، باتوجه‌به رابطهٔ $f(-x)=-f(x)$ نسبت به مبدأ قرینه‌اند. M و M' نسبت به مبدأ متقارن‌اند.

شکل ۳ ببینید. اگر توجه شود مبدأ مختصات مرکز تقارن

این این تابع است.



شکل ۳.

برخی از توابع نه فرد هستند و نه زوج؛ مانند تابع معادله، $f(x)=x^2-x$. درواقع بیشتر توابع این‌گونه‌اند. در ضمن $y=0$ هم فرد و هم زوج است.

تابع جزء صحیح

هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح قرار دارد، عبارت $[x]$ را که آن را کروشه یا جزء صحیح x خوانند، بنا به تعریف برابر است با:

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \le x \le n+1, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x]=n \qquad (۱۲)$$

هر تابع حقیقی که در معادله آن $[x]$ یا $[f(x)]$ وجود داشته باشد را تابع جزء صحیح می‌نامند.

تابع مرکب

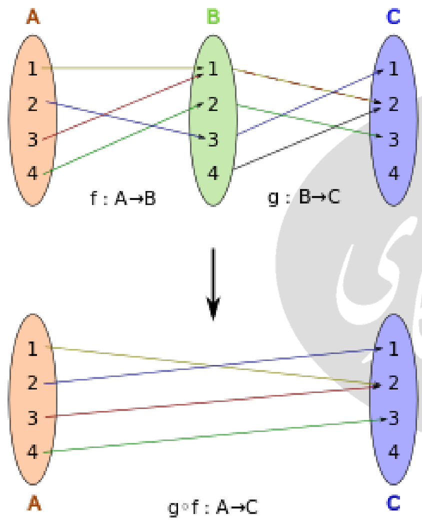
اگر دو تابع f و g داشته باشیم، به‌طوری‌که:

$$f:A\to B, g:B\to C$$

اگر $R_f \subset D_g$، دراین‌صورت داریم:

$$(gof):A\to C$$

gof تابعی مرکب از A در C است. شکل ۴ را ببینید.



شکل ۴.

و یا اگر سه تابع داشته باشیم:

$$f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$$

اگر $R_g \subset D_h, R_f \subset D_g$ دراین‌صورت داریم:

$$(hogof):A\to D$$

$(hogof)$ ترکیب این سه تابع، تابع مرکب از A در D است.

تابع مرکب، که در اقتصاد استفاده می شود، غالباً به صورت زیر است:

اگر f، g توابعی حقیقی به معادلات $z=f(u)$ و $u=g(x)$ باشند، روشن است، z تابعی از u و u تابعی از x است پس z، تابع، تابع از x یا z تابع مرکب از x است. به‌طورکلی اگر

$R_g \subset D_f$ تابع مرکب به‌صورت زیر است:

$$z = f(u) = f[g(x)] = fog(x)$$

دنباله

دنباله حالت خاصی از تابع است. اگر دامنه یک تابع مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد، تابع را دنباله خوانند. یعنی داریم:

$$f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}, f = \{(n,U_n): n \in \mathbb{N}, U_n \in \mathbb{R}, U_n = f(n)\} \quad (۱۳)$$

مثلاً دنباله $U_n = \frac{1}{n^2+1}$، که جملات آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{17},\ldots,\frac{1}{n^2+1},\ldots$$

تابع چند متغیره

اگر عناصر A، n گانه مرتب از $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$، و $A \subseteq \mathbb{R}^n$، و $y \in B \subseteq \mathbb{R}$، اگر به‌ازای هر X یک مقدار y طبق قانونی خاص نظیر شود، در این صورت تابعی n متغیره از A در B تعریف شده است، و می‌نویسند:

$$f: X \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to y \in B \subseteq \mathbb{R}$$

f تابع n متغیره، از A در B، به‌صورت $n+1$ گانه‌های مرتب، زیر است:

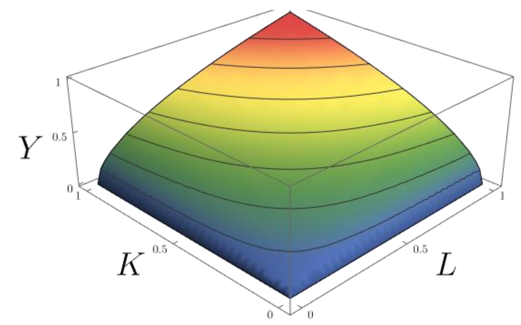
$$f = \{(X,y): X \in A \subseteq \mathbb{R}^n, y \in B \subseteq \mathbb{R}, y = f(X)\} \quad (۱۴)$$

$y = f(X)$ معادله یا ضابطه تابع به‌صورت صریح بوده و ممکن است به فرم $f(X,y)=0$ ضمنی باشد.

مثلاً در تابع تولید کاب داگلاس، f به‌صورت زیر است:

$$f = \{(K,L,Y): K,L \in \mathbb{R}^+, Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\}$$

این یک تابع دو متغیره از، K سرمایه، L نیروی کار، متغیرهای مستقل، Y، مقدار تولید متغیر تابع، A پارامتر و معادله تابع $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ است. در اقتصاد، معادله $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ را که معادله یا ضابطه تابع تولید f است، تابع تولید می‌خوانند (تعریف قدیمی تابع). اگر به تابع f توجه شود عناصر آن $(K,L,Y) \in \mathbb{R}^3$ است. از توابع چند متغیره، تنها می‌توان شکل توابع دو متغیره را رسم کرد. شکل تابع کاب داگلاس را شکل ۵ ببینید.



شکل ۵.

تابع همگن

تعریف: تابع m متغیره f به معادله $z = f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ را همگن گویند اگر در این تابع $x_1 \to \lambda x_1$، $x_2 \to \lambda x_2$،...، $x_m \to \lambda x_m$ بدل کنیم، داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1,x_2,\ldots,x_m) \quad (۱۵)$$

یعنی اگر متغیرها را λ برابر کرده، تابع λ^n برابر شود. n را درجه همگنی تابع خوانند.

مثلاً درجه همگنی تابع تولید کاب داگلاس را، بررسی می‌کنیم،

$$Z = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

از تعریف فوق استفاده کرده، داریم:

$$\begin{cases} KK \to \lambda K \\ L \to \lambda L \end{cases} \Rightarrow f(\lambda K,\lambda L) = (\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}[\mathrm{K}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}]$$

پس تابع فوق همگن از درجه $n = \alpha+\beta$ است.

نکته: اولاً اگر تابعی کثیرالجمله باشد، و درجه کلیه جملات آن یکسان باشد، تابع همگن است، درجه همگنی آن، درجه کثیرالجمله است. ثانیاً تابع n متغیره خطی، که از مبدأ بگذرد،

یعنی:

$$z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i , c_i \in \mathbb{R}$$

تابع همگن درجه یک خطی است. ثالثاً اگر رابطه (۱۵) برای تابعی برقرار نباشد تابع همگن نیست. مثلاً تابع f به معادله، $z=xe^{y}+ye^{x}$ همگن نیست، زیرا:

$$\begin{cases} x\to \lambda x \\ y \to \lambda y \end{cases} \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)e^{\lambda y}+(\lambda y)e\lambda^{\lambda x}=$$
$$\lambda[xe^{\lambda y}+ye^{\lambda x}]\neq \lambda^{n} f(x,y)$$

قضیه اویلر

اگر تابع $z=f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه n باشد، در این صورت داریم:

$$x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}=n.z \qquad (۱۶)$$

این رابطه، موسوم به رابطه اویلر می‌باشد. برای اثبات، رابطه (۱۵) را در نظر می‌گیریم؛

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y)$$

از رابطه فوق نسبت به λ مشتق می‌گیریم، اگر فرض کنیم $u=\lambda x$ و $v=\lambda y$، براساس قانون زنجیری داریم:

$$f'_u . u'_\lambda + f'_v . v'_\lambda = n\lambda^{n-1} f(x,y)$$
$$\Rightarrow f'_u . x + f'_v . y = n\lambda^{n-1} f(x,y)$$

به جای λ در رابطه فوق هر مقداری می‌توان قرار داد. اگر $\lambda=1$ باشد، $u=x$ و $v=y$ شده، پس داریم:

$$f'_x . x + f'_y . y = n.f(x,y)$$

که در آن:

$$f'_x=\frac{\partial z}{\partial x} \qquad f'_y=\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}=n.z$$

اویلر این رابطه را برای حل معادلات دیفرانسیل همگن و کامل استفاده کرد (پورکاظمی، ۱۳۸۸، ص. ۵۴).

از رابطه اویلر می‌توان سهم هریک از عوامل تولید را، تعیین کرد. اگر تابع تولید همگن درجه یک باشد، $Z=f(K,L)$، رابطه اولر به‌صورت زیر است.

$$K.\frac{\partial Z}{\partial K}+L.\frac{\partial Z}{\partial L}=Z$$

مقدار محصول Z، از دو عامل $K.\frac{\partial Z}{\partial K}$ و $L.\frac{\partial Z}{\partial L}$ تشکیل شده است. $K.\frac{\partial Z}{\partial K}$ سهم سرمایه، و $L.\frac{\partial Z}{\partial L}$ سهم نیروی کار در تولید Z است.

تابع متجانس

اگر ضابطه تابع $z=f(x,y)$ همگن باشد، هر تابع مرکب به معادله:

$$u=h(z)=hof(x,y) \qquad (۱۷)$$

را تابع متجانس نامند.

مثلاً می‌دانیم تابع کاب داگلاس $z=x^{\alpha}y^{\beta}$ همگن است. تابع $u=z^2+5$ و یا $u=z^2+5=x^{2\alpha}y^{2\beta}+5$ متجانس است. روشن است این تابع همگن نیست، هرچند هر تابع همگنی متجانس است، زیرا، کافیست، فرض کنیم، $u=h(z)=z=f(x,y)$. برعکس هر تابع متجانسی همگن نیست.

اگر تابع $u=h(z)=hof(x,y)$ متجانس باشد، منحنی‌های بی‌تفاوتی آن، $C=h(z)=hof(x,y)$ است. اگر هر خط گذرنده از مبدأ رسم شود، این خط منحنی‌های بی‌تفاوتی را در نقاطی قطع می‌کند. خطوط مماس در نقاط تقاطع موازی‌اند. روش اثبات شبیه تابع همگن است.

کتاب‌شناسی

اپوستل، ت. ت. (۱۳۹۴). *حساب دیفرانسیل انتگرال* (ج. ۲) (ترجمه ع. ا. عالم‌زاده). نیاز دانش.

بهرامی، م. (۱۳۴۸). *ریاضیات عمومی: برای دانشکده‌ها و مدارس عالی غیر اختصاصی ریاضی*. دانشگاه تهران.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۸۸). *معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن در مهندسی، علوم و اقتصاد*. نشر نی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۳). *ریاضیات برای اقتصاد و مدیریت*. نشرنی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۵). *ریاضیات عمومی کاربردهای آن* (ج. ۱). نشر نی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۶). *ریاضیات عمومی کاربردهای آن* (ج. ۲). نشر

نی.
نیلی، ف. (۱۳۹۳). *اقتصاد ریاضی* (ج. ۱). پژوهشکده پولی و بانکی.
وبر، ج. ا. (۱۳۸۶). *تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی* (ترجمه م. ح. پورکاظمی). دانشگاه شهید بهشتی.

Chiang, A. C., and Wainwright, K. (2005) *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (4rd ed.). McGraw-Hill.

Larson, R., and Edwards, B. H. (2020). *Calculus of a Single Variable*. Cengage Learning.

Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A., and Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economics Analysis* (2Rd ed.). Prentice-Hall.

محمدحسین پورکاظمی

عضو هیئت علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی