آنالیز ریاضی و توپولوژی

Mathematical Analysis and Topology

آنالیز ریا ضی شاخه‌ای مهم از ریا ضیات ا ست، که از حـساب دیفرانسـیل و انتگرال اسـتنتاج شـده اسـت. توپولوژی یکی از مباحث آموزش ریاضیات محض است، که از پیشرفت مفاهیمی از هندسی و نظریه مجموعه‌ها مانند فضا، بُعد، اشکال، تبدیلات و... به وجود آمده ا ست. باتوجه‌به رعایت محدودیت حجم این نو شتار، به مباحثی از، آنالیز ریاضی و توپولوژی می‌پردازیم، که بیشتر در بهینه‌سازی ریاضی، نظریه بازی‌ها، نظریه‌های اقتصادی مدرن و اقتصـاد ریاضـی به‌کار می‌رود. بحث با مجموعه اعداد آغاز می‌شود.

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$

در اقتصـاد ما از مجموعه اعداد، طبیعی $\mathbb{N}$، صـحیح $\mathbb{Z}$، گویا $\mathbb{Q}$، اصـم $\mathbb{Q}'$، حقیقی $\mathbb{R}$ و مختلط $\mathbb{C}$، و توابع روی این مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم.

مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

مجموعه مفروض A متناهی اسـت، اگرتعداد عناصـر آن عدد محدود باشد، و اگر تعداد عناصر آن نامحدود باشد مجموعه را نامتناهی گویند. مجموعه‌های نامتناهی شمارا یا ناشمارا، هستند. مجموعه را شـمارا گویند، اگر یک تناظر یک‌به‌یک بین عناصـر این مجموعه و مجموعه اعداد طبیعی N برقرار باشـد، در غیر این صورت مجموعه را ناشمارا خوانند.

تعاریف کرانه‌ها

S، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی $S \subset \mathbb{R}$ اسـت، آن را از بالا کراندار خوانیم، اگر $a \in \mathbb{R}$ وجود دا شته با شد، (نه لزوماً متعلق به S) به‌طوری‌که

$$\forall x \in S \Rightarrow x \le a$$

در این صـورت a را کرانه بالای S، خوانند. اگر $b \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد (نه لزوماً متعلق به S)، به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$\forall x \in S \Rightarrow x \ge b$$

b را کرانه پایین خوانده و مجموعه را کراندار از پایین گویند. تعداد زیادی کرانه بالا و پایین برای یک مجموعه وجود دارد. برای مثال در مجموعه $S = [0,1)$ همه اعداد کرانه بالای S و همه اعداد $b \le 0$ کرانه پایین مجموعه S است.

معرفی بعضی از فضاها $a \ge 1$

یک، مجموعه، تنها گروهی نامنظم از عناصر اسـت که بدون ارتباط، کنار هم قرار گرفته‌اند. اما اگر بر روی عناصـر این مجموعه نوعی عملیات جبری یا هندسـی تعریف شـود، آن را یک فضـا خوانده، و عناصـر مجموعه را نیز نقطه نامند. مانند مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ که در آنها انواع عملیات مانند، جمع، ضرب، تعریف شده، یک فضا هستند، در اقتصاد از فضـای اقلیدسـی و یا از فضـای برداری در تعریف تابعی از جمله تابعی هدف در برنامه‌ریزی پویا اسـتفاده می‌شـود (پورکاظمی، ۱۳۹۳، صص. ۱۴-۱۶).

فضای خطی یا فضای برداری

یک میدان مانند F، مجموعه‌ای اسـت که بر روی آن اعمال جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم شبیه چهار عمل متناظرشان در اعداد حقیقی تعریف و عمل می‌کند، عناصـرش را اسـکالر خوانند.

فضای متریک

در مجموعه دلخواه A، تابع حقیقی d از $A \times A$ در $\mathbb{R}$ را تعریف کرده، به‌طوری‌که d، در سه شرط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &1)\quad d(x,y) \ge 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ &2)\quad d(x,y) = d(y,x) \\ &3)\quad d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z) \end{aligned} \qquad (۱)$$

در این صورت A را فضای متریک خوانند d را متر یا متریک و $d(x,y)$ را فاصـله دو نقطه x و y در $A \times A$ گویند، و این فضای متریک را به (A,d) نشان می‌دهند.

تعریف مجموعه کراندار

فضـای متریک (A,d) را در نظر می‌گیریم، هر زیرمجموعه مانند S، از این فضای متریک را کراندار گویند، اگر هر دو نقطه دلخواه x,y از این فضا را در نظر بگیریم $d(x,y)$ یا فاصله آن محدود باشـد. اگر این فاصـله بی‌نهایت باشـد، مجموعه را بیکران خوانند. در، مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ فضـای با متریک

فاصله دو نقطه، زیرمجموعه (−۵،۱) کراندار است ولی $[1,-\infty]$ بیکران است.

فضای خطی نرم‌دار

نقطه X در $\mathbb{R}^n$ مفروض، فاصله اقلیدسی بین X و مبدأ یعنی $d(X,0)$ نرم اقلیدسی X خوانده و به $\|X\|$ نشان داده و $d(X,Y)$ را به $\|x-y\|$ نشان می‌دهند. اگر X و Y دو نقطه در $\mathbb{R}^n$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ باشد به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که برای نرم اقلیدسی، داریم:

$$\begin{aligned}&1)\quad \|X\|\geq 0, \|X\|=0 \Leftrightarrow X=0\\ &2)\quad \|X\|+\|Y\|\geq \|X+Y\|\\ &3)\quad \|\alpha X\|=|\alpha|.\|X\|\end{aligned} \qquad (۲)$$

ساختار توپولوژیک یک فضای متریک

توپولوژی عمومی ریشه در مفاهیم درهم‌تنیدهٔ مجموعهٔ باز، مجموعهٔ بسته و نقطهٔ حدی و... استفاده‌هایی مهم از آنها دارد.

تعریف همسایگی و نقاط داخلی و مرزی

فضای متری A با متریک $d(x,y)$، یک $\in>0$ ، همسایگی نقطه $x\in X$، مجموعه زیر است:

$$N_\varepsilon(x)=\{y\in A,|d(x,y)<\varepsilon\} \qquad (۳)$$

مثلاً یک ε همسایگی در فضای متریک $\mathbb{R}^2$ با متر فاصله دو نقطه، تمام نقاط داخل دایره‌ای به مرکز x و شعاع ε، یا در $\mathbb{R}^3$ نقاط داخل یک کره به مرکز x و شعاع ε است.

تعریف مجموعه باز

اگر S زیرمجموعه‌ای از یک فضای متریک A، با متر $d(x,y)$ باشد، S را یک مجموعه باز گویند اگر برای هر $x\in S$ یک ε همسایگی وجود داشته باشد به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$N_\varepsilon(x)\subset S \qquad (۴)$$

تعریف نقطه داخلی و مرزی

اگر S زیرمجموعه‌ای از یک فضای متریک A، با متر $d(x,y)$ باشد، نقطه x را نقطه داخلی مجموعه S خوانند اگر و فقط اگر، یک ε همسایگی از x که تنها به A وجود داشته باشد، یعنی:

$$N_\varepsilon(x)\subset S$$

مجموعه نقاط داخلی مجموعه S را درونی S گویند و به $I(S)$ نشان می‌دهند. روشن است که داریم، $I(S)\subseteq S$ مجموعه‌ای مانند S را باز خوانند اگر،

$$I(S)=S$$

فضای توپولوژیک

یک زوج (A,T)، فضای توپولوژی خوانند، درصورتی‌که A یک مجموعه و T؛ کلاسی از زیرمجموعه‌های باز A_i از مجموعه A بوده، به‌طوری‌که دارای شروط زیر باشد:

$$\begin{aligned}&1)\quad A,\phi\in T\\ &2)\quad \forall A_i\in T\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i\in T\\ &3)\quad \forall A_i\in T\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i\in T\end{aligned} \qquad (۵)$$

در این صورت کلاس T را یک توپولوژی در A گویند. عناصر A را نقاط فضای توپولوژی نامند.

تعریف مجموعه فشرده

فضای متریک (A,d) را در نظر می‌گیریم، هر زیرمجموعه مانند S از این فضای متریک را فشرده گویند، اگر اولاً کراندار و ثانیاً بسته باشد. یک $\varepsilon>0$ همسایگی در $\mathbb{R}^2$ باز است، پس فشرده نیست ولی فاصله $[5,10]$، فشرده است.

تعریف نقطه حدی

فرض کنید S زیرمجموعه باز از یک فضای متریک (A,T) باشد. نقطه x_0 یک نقطه حدی S نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon>0$ همسایگی x_0، نقطه دیگری مانند x از مجموعه S در آن باشد. مثال: فضای متریک $(\mathbb{R},T)$، را در نظر بگیرید، هرمجموعه باز $S\subseteq\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، نقطه $x_0\varepsilon S$ یک نقطه حدی است. برای ملاحظه کابرد این مفاهیم انتزاعی از

ریاضیات در اقتصاد را در (Sydsaeter et al., 2008, pp. 484-492) ملاحظه کنید.

تحدب و تقعر

اگر X_1 و X_2 دو نقطه در $\mathbb{R}^n$ باشند، بنابه تعریف ترکیب محدب این دو نقطه، نقطه‌ای است مانند X به‌طوری‌که:

$$\alpha X_1+(1-\alpha)X_2=X\ ,0<\alpha<1 \qquad (۶)$$

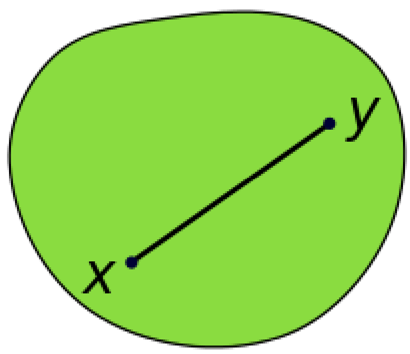
اگر α به صفر نزدیک شود X به‌سمت X_2، و اگر α به‌سمت یک میل کند X به‌سمت X_1 نزدیک می‌شود.

مجموعه‌های محدب و مقعر

مجموعه S زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$ را یک مجموعه محدب گویند اگر،

$$\forall X_1,X_2 \in S, X_1 \neq X_2 \Rightarrow \alpha X_1+(1-\alpha)X_2=X \in S \qquad (۷)$$

مفهوم هندسی تعریف فوق آن است که اگر مجموعه‌ای محدب باشد، هر دو نقطه دلخواه که در آن انتخاب شود کلیه نقاط بین این دو نقطه متعلق به مجموعه S است،



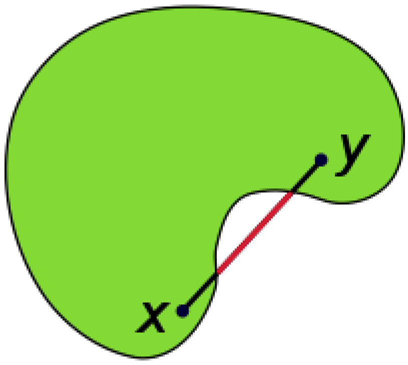
شکل ۱.

شکل ۱، مجموعه S، $S\subset\mathbb{R}^2$ محدب است.

مجموعه‌ای که محدب نباشد، مقعر است. در مجموعه مقعر داریم

$$\exists X_1,X_2 \in S, X_1 \neq X_2 \Rightarrow \alpha X_1+(1-\alpha)X_2=X \notin S \qquad (۸)$$

شکل ۲، مجموعه S، $S\subset\mathbb{R}^2$ مقعر است.



شکل ۲.

$\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ و به‌طورکلی $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌های محدب‌اند.

تعریف نقطهٔ فرین

نقطه فرین یک مجموعه A نقطه‌ایست از مجموعه، که نتوان آن را به صورت ترکیب محدب از دو نقطه آن مجموعه نشان داد، مثلاً در چند یک ضلعی رئوس، نقاط فرین هستند. مجموعه‌ای موکداً محدب است که اولاً محدب باشد، ثانیاً تمام نقاط مرزی آن فرین باشد. یک کره بسته در $\mathbb{R}^3$ مانند $x^2+y^2+z^2\leq r^2$ یک مجموعه اکیداً محدب است. ولی تمام نقاط داخل و اضلاع یک مربع مجموعه محدب است، ولی موکد نیست.

توابع محدب و مقعر

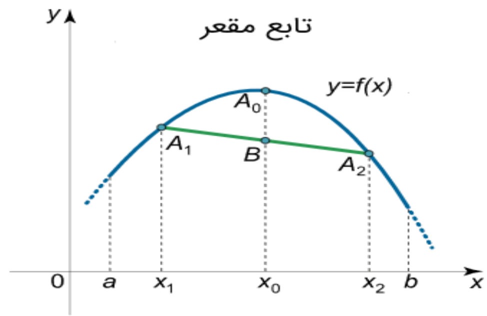
تعریف: تابع n متغیره $y=f(X)$، $X\in\mathbb{R}^n$ در مجموعه محدب D، $D\subset\mathbb{R}^n$، تعریف شده، این تابع در D اکیداً محدب است، اگر

$$\forall X_1,X_2 \in D \Rightarrow f(\alpha X_1+(1-\alpha)X_2)<\alpha f(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{f}(X_2) \qquad (۹)$$
$$0<\alpha<1$$

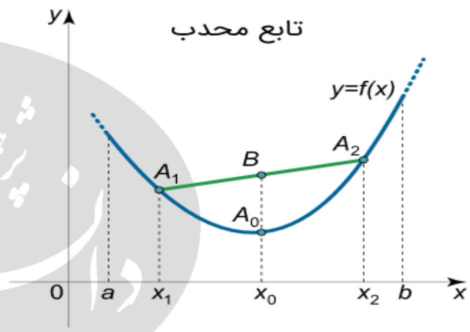
و تابع اکیداً در D اکیداً مقعر است اگر جهت نامساوی عوض شود یعنی

(۱۰)

$$\forall X_1, X_2 \in D \Rightarrow f(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2) > \alpha f(X_1) + (1-\alpha) f(X_2)$$
$$0 < \alpha < 1$$



(الف)



(ب)

شکل ۳.

شکل تابع (۳ الف) اکیداً مقعر و (۳ ب) اکیداً محدب است.

تعریف توابع شبه محدب و شبه مقعر

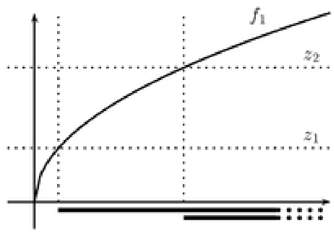
تعریف: تابع n متغیره $y = f(X)$، $X \in \mathbb{R}^n$ در ناحیه محدب D، $D \subset \mathbb{R}^n$، تعریف شده، شبه محدبست، اگر

(۱۱)
$$\forall X_1, X_2 \in D \Rightarrow f[\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2] \le Max[f(X_1), f(X_2)]$$

این تابع شبه مقعر است، اگر داشته باشیم:

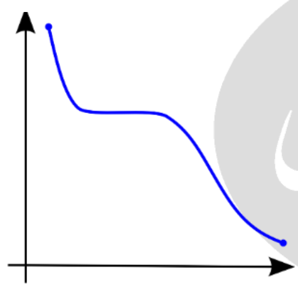
(۱۲)
$$\forall X_1, X_2 \in D \Rightarrow f[\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2] \ge \min[f(X_1), f(X_2)]$$

اگر علامت تساوی در رابطه فوق وجود نداشته باشد، تابع اکیداً، شبه محدب و شبه مقعر است.



شکل ۴.

شکل ۴ سهمی، اکید مقعر است، ضمناً اکیداً شبه محدب نیز بوده، در ضمن اکید شبه مقعر نیز هست زیرا در تعاریف (۱۱) و (۱۲) صدق می‌کند.


شکل ۵.

تابع شکل ۵ محدب و مقعر نیست، ولی هم شبه محدب است و هم شبه مقعر، است.

نقطه ثابت

بحث نقطه ثابت را اولین بار هنری پوانکاره و چارلز امیل پیکارد در معادلات دیفرانسیل استفاده کردند. قضیه نقطه ثابت بروور، یکی از دستاوردهای اولیه توپولوژی در اوایل قرن بیستم تعریف و اساس قضایای عمومی نقاط ثابت دیگر شده، و در آنالیز ریاضی کاربردهای مهم دارد.

تعریف نقطه ثابت یک تابع: تابع حقیقی n متغیره $f: A \to B$ به‌طوری‌که، $A \cap B \neq \varphi$ نقطه ثابت این تابع نقطه $X^* \in A$

است، اگر داشته باشیم:

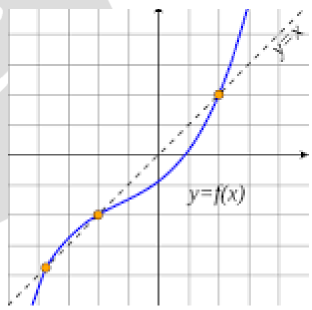
$$f(X^*) = X^* \qquad (۱۳)$$

تابع تقاضای $q = 12 - p^2$، مفروض است، آیا در این تابع نقطه‌ای وجود دارد، که عرضه برابر تقاضا یعنی، $q = p$ باشد؟ پاسخ ساده است.

$$\begin{cases} q = 12 - p^2 \\ q = p \end{cases} \Rightarrow p = 10 - p^2 \Rightarrow p^2 + p - 12 = 0 \Rightarrow p = 3$$

پس داریم، $p = q = 3$. این نقطه که نقطه تعادل بوده، نقطه ثابت تابع فوق است.

در فضای یک بعدی نقطه ثابت $f(x^*) = x^*$ ازنظر هندسی، محل تلاقی تابع با نیمساز ربع اول است، شکل ۶ را ببینید.



شکل ۶.

در ریاضی نقطه ثابت برای نشان دادن وجود جواب، در یک دستگاه معادلات غیرخطی استفاده می‌شود. در اقتصاد، قضایای نقطه ثابت بیشتر اوقات برای تضمین وجود تعادل در مدل هایی پیچیده به کار می‌رود (Arrow and Intriligator, 2019, pp. 49-50). انواع نقطه ثابت وجود دارد، که دو نقطه ثابت که در اقتصاد کاربرد دارد، معرفی می‌شود.

قضیه نقطه ثابت بروور

وجود نقطه ثابت بروور یک قضیه در توپولوژی است. اگر A یک زیرمجموعه محدب و فشرده از $\mathbb{R}^n$ باشد و f تابعی پیوسته به‌صورت، $f: A \to A$ باشد، آنگاه حداقل یک نقطه ثابت $X^* \in A \subset \mathbb{R}^n$ وجود دارد، به‌طوری‌که داریم:

$$f(X^*) = X^* \qquad (۱۴)$$

مفهوم قضیه بروور با مثال قبلی در مورد تابع تقاضا در فضای یک بعدی روشن است. در مورد مثال قبل آیا تابع تقاضا در فاصله $f: [0,1] \to [0,1]$ دارای نقطه ثابت است؟ جواب منفی است، زیرا هنگامی‌که $p \in [0,1]$، داریم، $q \in [11,12]$ پس در این فاصله تعریف شده، نقطه ثابت بروور وجود ندارد. می‌توان فاصله را تغییر داد مثلاً $f: [2,4] \to [2,4]$ مسئله جواب فوق را دارد.

نقطه ثابت کاکوتانی

نقطه ثابت بروور برای توابع پیوسته در دامنه خاص بوده، نقطه ثابت کاکوتانی تعمیم نقطه بروور است توسط شیزو کاکوتانی و آن را برای توابع مجموعه‌ای و به‌صورت تناظر تعمیم می‌دهد.

قضیه ۱: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای، ناتهی، محدب، فشرده از $\mathbb{R}^n$ باشد، و $f(X)$ تناظری از A به زیرمجموعه‌ای، بسته، از A باشد. اگر اولاً $f(X)$ برای هر X از A مجموعه‌ای ناتهی و محدب باشد ثانیاً تابع f شبه یا نیمه پیوسته از بالا (اینتریلیگیتور، ۱۳۸۶، صص. ۱۱-۱۲) باشد، در این صورت تابع f، حداقل یک نقطه ثابت X^* در A دارد، یعنی، $f(X^*) = X^*$.

نکته ۱: اولاً باتوجه‌به تعریف تناظر، می‌توان از قضیه نقطه ثابت کاکوتانی، به قضیه بروور رسید. ثانیاً اثبات این قضیه را برای حالت یک بعدی می‌توان ملاحظه کرد (Sydsaeter et al., 2008, pp. 513-514).

نکته ۲: کاربردهای قضیه نقطه ثابت بروور و، قضیه نقطه ثابت کاکوتانی، برای اثبات وجود تعادل عمومی در اقتصاد بازار، در (Arrow and Debreu, 1954, pp. 265-290) و، وجود تعادل در یک اقتصاد مبادله‌ای را در (Sydsaeter et al., 2008, pp. 515-518) ملاحظه کنید. جان نش از این قضیه برای توصیف تعادل نش در نظریه بازی‌ها استفاده کرد. این قضیه در نظریه بازی‌ها و اقتصاد کاربردهای گسترده‌ای پیدا کرد (Border, 1989).

کتاب‌شناسی

اینتریلیگیتور، م. د.(۱۳۸۶). *بهینه‌سازی ریاضی* (ترجمه م. ح. پورکاظمی). دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۳). *بهینه سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن.*

دانشگاه شهید بهشتی.
پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۶). *ریاضیات عمومی کاربردهای آن* (ج. ۲). نشر نی.
پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۸). *فرایندهای تصادفی پیشرفته و کاربردهای آن (در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی)*. سمت.
حسینیون، ع. ر. (۱۳۸۵). *آنالیز ریاضی* (ج. ۲). حفیظ.
سیمونز، ج. ف. (۱۳۹۳). *آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین* (ترجمه ا. نیکنام). مرکز نشر دانشگاهی.
لوئنبرگر، د.ج. (۱۳۹۴). *برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی* (ترجمه ن. مهدوی امیری و م. ح. پورکاظمی). دانشگاه صنعتی شریف.
نیلی، ف. (۱۳۹۳). *اقتصاد ریاضی* (ج. ۱). پژوهشکده پولی و بانکی.

Arrow, K. J., and Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, *22*(3), 265 - 290. https://doi.org/10.2307/1907353

Arrow, K. J., and Intriligator, M.D. (2019). *Handbook of Mathematical Economic*. Elsevier.

Border, K.C. (1989). *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press.

Chiang, A. C., and Wainwright, K. (2005) *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (4rd ed.). McGraw-Hill.

Green, J., and Heller, W.P. (1981). Mathematical Analysis and Convexity with Applications to Economics. In K. J. Arrow and M. D. Intriligator (Eds.), *Handbook of Mathematical Economics* (Vol. 1, pp. 15-52.). North Holland.

Rudin, W. (2017). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A., and Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economics Analysis* (2Rd ed.). Prentice-Hall.

Takayama, A. (1985). *Mathematical Economics* (2rd ed.). Cambridge University Press,

محمدحسین پورکاظمی

عضو هیئت علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی