فرایندهای تصـــادفی و بهینه‌ســـازی پویای تصادفی

Stochastic Process and Stochastic Dynamic Optimization

فرایندهای تصـادفی نوعی از متغیرهای تصـادفی با ویژگی‌های خاص اســت، که در یک فضــای احتمال فیلتر شــده، تعریف می‌شـــود. امروزه، حوزه‌های مالی، کســـب‌وکار و بورس‌ها به سرعت ر شد و تغییرات زیادی در آنها ایجاد شده ا ست. این تغییرات سریع، به‌واسطه ابزارهای مدرن مالی، پدید آمده است. با اســتفاده از مجموعه‌ای از فرایندهای تصــادفی، و کاربردهای آن، انواع قیمت‌گذاری‌ها برای این ابزارها انجام می‌شـــود. این مجموعه را ریا ضیات مالی می‌نامند. در حل م سئله بهینه سازی پویا، حسابان معمولی، به‌کار می‌رود. در حل مسائل بهینه‌سازی پویای تصـادفی از حسـابان تصـادفی که اسـاس آن فرایندهای تصادفی است استفاده می‌شود.

ساختارهای اطلاعاتی

کلیه نتایج یک آزمایش ت صادفی را، ف ضای نمونه نامیده و به S نشان می‌دهند. هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیش‌آمد، یا حادثه گویند. کلا سی از زیرمجموعه‌های ف ضای نمونه S را، به F نشان داده و در ادبیات احتمال، آن را (جبر-σ)، و در مالی، ساختار اطلاعاتی می‌خوانند. F دارای خواص زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \phi, S \in F \\
&(ii)\ A \in F \Rightarrow A^C \in F \\
&(iii)\ \forall A_1, A_2 .... \in F \Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in F
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

A^C برابر است با، $S - A = A^C$.

نکته ۱: برای هرافراز از مجموعه S، یک ســـاختار اطلاعاتی F وجود دارد.

نکته ۲: ســـاختار اطلاعاتی با کمترین اطلاعات را ســـاختار اطلاعاتی بورل گویند و به B نشان داده، و $B \subseteq F$.

متغیر تصادفی

فضــای احتمالی (S, F, P) را در نظرمی‌گیریم، اگر X یک تابع حقیقی تعریف شده از S، در $\mathbb{R}^n$، به‌صورت زیر باشد،

$$X : S \to \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3, ..., n \qquad (۲)$$

در آن برد تابع X، مجموعه‌ای از اعدادی حقیقی اســت. برد این تابع را متغیر تصـــادفی در فضـــای احتمال (S, F, P) خوانند، یعنی به‌ازای هر $\omega \in S$، $X(\omega)$ یک عدد حقیقی است، $X(\omega)$ را یک متغیر ت صادفی خوانند. این متغیر ت صادفی ممکن ا ست پیو سته یا گ س سته با شد. به کمک متغیر ت صادفی، انواع توابع احت مال، ازجم له، تابع تجمعی، تابع احت مال و تابع چ‌گالی احتمال، امید ریاضـــی... و توزیع‌های احتمال، مانند، برنولی، دوجمله‌ای، پواســـون، نرمال، لوگ نرمال،... تعریف می‌شـــود (ووناکت و ووناکت، ۱۳۸۷، صــص. ۱۱۱-۷۹). آشـنایی با این توابع و توزیع‌ها، برای مطالعه این نوشتار ضروریست.

گام تصادفی

گام تصـــادفی یا گام برداری تصـــادفی، یکی از مهم‌ترین فرایندهای ت صادفی زمان- گ س سته ا ست، این فرایند ت صادفی به‌صـــورت گســـترده‌ای در قیمت‌گذاری انواع اختیارها و در مدل‌ســـازی ســـرمایه‌گذاری مالی به کار می‌رود (هال، ۱۳۸۴، صـــص. ۴۰۴-۴۲۴). در ضـــمن به کمک آن، حرکت براونی ساخته می‌شود.

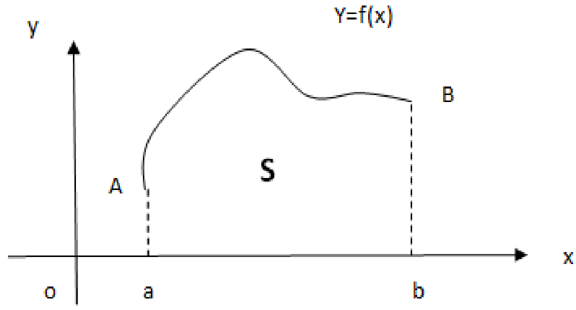
فرض کنیم یک جســم در وضــعیت صــفر قرار دارد. دوره زمانی $[0, T]$ را به تعداد n گام مساوی، به اندازه زمان $t_1 > 0$ تقسیم کرده، این جسم از وضعیت صفر حرکت می‌کند، در هر گام با فا صله زمانی t_1، ج سم به اندازه h_1 واحد، با احتمال p بالا و یا به اندازه h_2، به احتمال $1 - p$ پایین می‌آید. اگر $X(t)$ نمایش و ضعیت ج سم در زمان t با شد، در این صورت $X(t)$ در $t = 0$، $t = t_1, t = 2t_1, ..., t = T$ یـک دنبـالـه از متغیرهـای تصــادفی وابســته زمان- گســســته بوده که آن را گام تصــادفی گویند.

مسئله بهینه‌سازی تصادفی

یکی از کاربردهای فرایند ت صادفی، در بهینه سازی ت صادفی، یا کنترل بهینه تصادفی است.

بهینه‌ســازی پویا و مســئله کنترل، دارای تاریخچه طولانی ا ست و این مو ضوع ابتدا با ح ساب تغییرات شروع شد. این بخش در ســال‌های پایانی قرن هفدهم با مســئله هم محیطی در

ریاضی شروع شد. در این مسئله که در شکل ۱ نشان داده شده، معادله منحنی $y=f(x)$ چگونه باشد تا مساحت محصور S، ماکزیمم گردد، با فرض آنکه طول کمان AB، ثابت باشد.



شکل ۱.

باید مسئله بهینه‌سازی زیر حل شود.

$$\begin{aligned} &Max\ s=\int_a^b y\,dx \\ &s.t \quad \int_a^b \sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx = l \end{aligned} \qquad (۳)$$

حل این مسئله قریب چهل سال طول کشید، و شاخه‌ای از ریاضیات به نام حساب تغییرات توسط ریاضیدانان بزرگی مانند اویلر، لژاندر و نهایتاً لاگرانژ، ایجاد و حل این نوع مسائل امکان‌پذیر شد. کاربرد حساب تغییرات در اقتصاد، در سال ۱۹۲۴ با مقاله جی، سی، اونس، تحت عنوان، پویایی یک انحصارگر شروع شد. او در این مقاله، با استفاده از روش حساب تغییرات مسیر بهینه قیمت را چنان تعیین کرد تا سود انحصارگر بیشینه شود (پورکاظمی، ۱۳۹۳، صص. ۶۸-۷۰). در سال ۱۹۲۸ فرانک رمزی در مقاله معروف خود، تحت عنوان، یک نظریه ریاضی پس‌انداز، از حساب تغییرات استفاده کرد. این مقاله را می‌توان مبنای جدید نظریه رشد اقتصادی دانست (چیانگ، ۱۳۸۷، صص. ۱۱۱-۱۱۶). او نیز در این مقاله از روش حساب تغییرات استفاده کرد. در دهه سال‌های ۶۰-۱۹۵۰ با تعریف مسئله کنترل بهینه و حل آن به روش اصل ماکزیمم توسط پونتری اگین، دانشمند روسی و روش برنامه‌ریزی پویا توسط بلمن امریکایی، مسائل جدید کنترل بهینه ارائه شد. در حالت کلی، مسئله کنترل بهینه، که موسوم به مسئله کنترل بولزا است، می‌خواهیم مسیرهای زمانی بهینه متغیر کنترل $u^*(t)$, و متغیر وضعیت، $x^*(t)$ را چنان تعیین کنیم تا، تابعی هدف زیر نسبت به معادله حرکت آن، بیشینه باشد، یعنی:

$$\begin{aligned} &\underset{u}{Max}Z=\int_{t_0}^{T} I(t,x,u)dt+F(T,x(T)) \\ &s.t \quad \dot{x}=f(t,x,u) \end{aligned} \qquad (۴)$$

مسئله کنترل بولزا به روش‌های اصل ماکزیمم پونتری اگین و روش برنامه‌ریزی پویای ریچارد بلمن حل می‌شود. استفاده از کنترل بهینه در اقتصاد و مدیریت، از دهه شصت گسترش یافت (پورکاظمی، ۱۳۹۳). استفاده از کنترل تصادفی در اقتصاد و مدیریت از قریب پنجاه سال پیش شروع شد. نمونه‌ای از مسئله کنترل تصادفی را در چاپ اول کتاب برنامه‌ریزی پویای می‌توان دید. در ماه می سال ۱۹۷۲، همایشی متشکل از اقتصاددانان و مهندسین کنترل، در دانشگاه پرینستون ترتیب داده شد. هدف اصلی این کنفرانس، تحقیق در زمینه امکان اجرایی بودن تکنیک‌های کنترل تصادفی (که در مهندسی گسترش یافته) در اقتصاد بود (Kendrick, 2005). امروزه بعد از کمتر از پنجاه سال از آن تاریخ، استفاده از کنترل تصادفی در اقتصاد گسترش فوق‌العاده یافته است. برای استفاده از این بخش علاوه‌بر آشنایی با کنترل بهینه غیرتصادفی باید با انتگرال ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی لازم است.

تعریف مسئله کنترل تصادفی

اصولاً در مالی و اقتصاد، ما با متغیرهای تصادفی وابسته به زمان که فرایندهای تصادفی بوده، روبه‌رو هستیم. حال اگر متغیرهای فوق ازجمله متغیر وضعیت $X(t)$ و یا متغیر کنترل $U(t)$ فرایندهای تصادفی باشند، مسئله کنترل تصادفی می‌باشد. فرض می‌کنیم S فضای نمونه و F ساختار اطلاعاتی و B_t ساختار اطلاعاتی فیلتر شده و P اندازه احتمال باشد در فضای احتمالی (S,B_t,F,P)، $X(t)$، فرایند تصادفی و $W(t)$ حرکت براونی استاندارد تعریف شده است. در حالت کلی مسئله کنترل تصادفی، تابعی هدف زیر، باید نسبت به قید آنکه معادله

حرکت است بیشینه شود:

$$
\begin{aligned}
&\underset{U}{Max}\ Z = E\left(\int_{t_\circ}^{T} I(t,X(t),U(t))dt + F(X(T),T)\right)\\
&s.t.\ dX(t) = f(t,X(t),U(t))dt + \sigma(t,X(t),U(t))dW(t) \qquad (۵)\\
&X(\circ) = X_\circ
\end{aligned}
$$

$dX(t)$ و $dW(t)$ نموی از فرایند های تصـــادفی $X(t)$ و $W(t)$ اســـت. در معادله حرکت، که یک معادله دیفرانســـیل تصـــادفی اســـت، $\alpha(t,X(t),U(t))$، نرخ انتظاری تغییر متغیر وضـــعیت اســـت و $\sigma(t,X(t),U(t))$ جمله اخلال بوده که به فرایند براونی $W(t)$ وابسته است. در این مسئله باید متغیرهای کنترل $U^*(t)$ و متغیر وضـــعیت $X^*(t)$, را چنان تعین کنیم تا تابعی هدف فوق، نسبت به معادله حرکت بیشینه شود.

معادله بلمن تصادفی

مسئله کنترل تصادفی (۵) به روش‌های مختلف قابل حل است. ازجمله روش معادله بلمن تصـــادفی، که در این نوشـــتار به آن می‌پردازیم. روش دیگر را آناستازیوس زیاپادیس در سال ۱۹۹۷ از معادله بلمن تصـــادفی به معادله‌ای شـــبیه هامیلتون- ژاکوبی- بلمن غیرتصـــادفی رســـید، که از این روش نیز برای حل کنترل بهینه تـصادفی ا ستفاده می شود. ا ساس حل مـسئله کنترل بهینه تصادفی مبتنی حل بر معادلات دیفرانسیل تصادفی است. برای حل مسئله کنترل تصادفی، از معادله بلمن تصادفی که به‌صورت زیر است، استفاده می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&-Z_t(t,X) = \underset{U}{Max}[I(t,X,U) + Z_x(t,X)f(t,X,U) +\\
&\tfrac{1}{2}\sigma^2(t,X,U)Z_{xx}(t,X)] \qquad (۶)
\end{aligned}
$$

در روش برنامه‌ریزی پویای تصـــادفی در معادله بلمن به‌جای I, f, σ از صورت مسئله مقدار قرار داده و از آن، U^* را چنان تعیین می‌کنیم که این معادله ماکزیمم باشـد. یعنی نسـبت به u مشتق جزئی گرفته (شرط لازم مرتبه اول)، داریم:

$$
\begin{aligned}
&[\frac{\partial}{\partial u}I(t,X,U) + Z_x(t,X)\frac{\partial}{\partial u}f(t,X,U) +\\
&\tfrac{1}{2}Z_{xx}(t,X)\frac{\partial}{\partial u}\sigma^2(t,X,U)] = 0
\end{aligned}
$$

از این معادله مقدار U^* برحســب t، X و Z_x, Z_{xx}، محاســبه می شود. ماکزیمم بودن نـسبت به U را با محا سبه مـشتق مرتبه دوم بررسی می‌کنیم. سپس به‌جای U^* در رابطه (۶) مقدار قرار داده به یک معادله دیفرانســـیل با مشـــتقات جزئی تصـــادفی می‌رسیم، از حل این معادله Z^* محاسبه می‌شود در رابطه U^* که قبلاً به‌د ست آمده بود به‌جای Z^* مقدار قرار داده، از معادله اخیر و معادله حرکت مســـیرهای بهینه متغیرهای $X^*(t)$, و سپس $U^*(t)$ به‌دست می‌آید.

مسئله خودگردان و ارزش فعلی

اگر مســـئله کنترل تصـــادفی بدون در نظر گرفتن عامل e^{-rt} (برای محا سبه ارزش فعلی) خودگردان با شد، یعنی در توابع I و معادله حرکت متغیر t وجود ندارد. پس مـسئله، افق نامحدود، و به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max\quad Z = E\int_{t_\circ}^{\infty} I(X,U)e^{-rt}dt\\
&S.t.\ dX = f(X,U)dt + \sigma(X,U)dW \qquad (۷)\\
&X(t_\circ) = X_\circ
\end{aligned}
$$

مســـئله را می‌توان به‌صـــورت ســـاده‌تر درآورد. معادله بلمن تصادفی (۶) را در نظر می‌گیریم داریم:

$$
-Z'_t(X,t) = \underset{U}{Max}\ E\begin{bmatrix} I(X,U)e^{-rt} + Z'_x(X,t)f(X,U) + \\ \frac{1}{2}\sigma^2(X,U)z''_{x^2}(X,t) \end{bmatrix}
$$

باتوجه‌به جمله e^{-rt} در جمله اول طرف دوم و فقدان آن در ســایر جمله‌ها، می‌توان تغییر متغیر $Z(X,t) = V(X)e^{-rt}$، داد. با این تغییر متغیر معادله بلمن تصـــادفی، به‌صـــورت یک معادله دیفرانسیل تصادفی معمولی که حل آن ساده‌تر است، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$
rV(X) = E\ \underset{u}{Max}\left[I(X,U) + V'(X)f(X,U) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(X)\right] \quad (۸)
$$

در اقتصاد مسائل غالباً به‌صورت خودگردان (۷) است، لذا برای حل آنها بهتر است از معادله (۸) استفاده کرد.

کتاب‌شناسی

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۳). *بهینه سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن*. دانشگاه شهید بهشتی.

پورکاظمی، م. ح. (۱۳۹۸). *فرایندهای تـصادفی پیـشرفته و کاربردهای آن (در اقتصاد، مدیریت و مهندسی مالی)*. سمت.

چیانگ، آ. س. (۱۳۸۷). *اصـــول بهینه‌یابی پویا* (ترجمه ف. اهرابی و ع.

شـاکری). دانشـگاه علامه طباطبایی. (تاریخ انتشـار به زبان اصـلی ۱۹۹۲)
حسینیون، ع. ر. (۱۳۸۵). *آنالیز ریاضی* (ج. ۲). حفیظ.
راس، ش. م. (۱۳۹۴). *فرایندهای تـصادفی* (ترجمه ع. پا شا). مرکز نـشر دانشگاهی.
گریگوریو، م. (۱۳۸۹). *آنالیز تصادفی* (ترجمه م. جلوداری‌ممقانی و ع. ر. بادامچی‌زاده). دانشگاه علامه طباطبائی.
لفبری، م. (۱۳۹۴). *فرایندهای تـصادفی کاربردی* (ترجمه ش. کردنوری و ح. ر. مصـطفایی). جهاد دانشـگاهی. (تاریخ انتشـار به زبان اصـلی ۲۰۰۶)
ووناکت ت. هـ، و ووناکت، ر. ج. (۱۳۸۷). *آمار مقدماتی* (ترجمه م. ر. مشکانی). مرکز نشر دانشگاهی
هال، ج. (۱۳۸۴). *مبانی مهندسـی مالی و ریسـک مدیریت* (ترجمه س. سـیاح و ع. صـالح‌آبادی). گروه رایانه تدبیرپرداز. (تاریخ انتشـار به زبان اصلی ۲۰۰۲)
Kendrick, D. A. (2005). Stochastic Control for Economic Models: Past, Present and the Paths Ahead. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *29*(1-2), 3 - 30. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2003.02.002
Lin, X. S. (2006). *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. John Wiley and Sons.
Shreve, E. S. (2004) *Stochastic Calculus for Finance, II, Continues-Time Models*. Springer.

محمد حسین پورکاظمی

عضو هیئت علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی