

الگوهای سری زمانی تک متغیره

Univariate time series models

الگوهای سری زمانی تک متغیره سعی می کنند رفتار یک متغیر را به طور عمده براساس مقادیر گذشته آن متغیر الگوسازی کنند. این الگوها قادرند پیش بینی های نسبتاً دقیقی را از کمیت های آتی متغیرها ارائه کنند. برخلاف الگوهای اقتصادسنجی ساختاری که بر اساس مبانی نظری اقتصادی تصریح می شوند، الگوهای سری زمانی فاقد مبانی نظری اقتصادی هستند و از اطلاعات آماری برای الگوسازی رفتار یک متغیر بهره می جویند. چنین الگوهایی، که تنها مقدار فعلی یک متغیر را به مقادیر گذشته آن متغیر و خطاهای حال و گذشته آن ارتباط می دهند، الگوهای سری زمانی تک متغیره نامیده می شوند. این الگوها عبارتند از: الگوی خودرگرسیون، الگوی میانگین متحرک، الگوی خودرگرسیون میانگین متحرک و الگوی خودرگرسیون جمعی میانگین متحرک که به شرح هر کدام از آنها می پردازیم. این الگوها را می توان با تفصیل بیشتری در کتاب های اقتصادسنجی سری های زمانی از جمله اندرس (Enders, 2015)، هاتاناکا (Hatanaka, 2003)، کرچ گسنر و همکاران (Kirchgassner, 2013)، لوتکاپل و کراتزیگ (Lutkepohl and Kratzig, 2004) و نوفرستی (۱۳۹۵) یافت.

الگوی خودرگرسیون (AutoRegressive model (AR))

یک الگوی خودرگرسیون (AR) رفتار آینده یک متغیر را براساس رفتار گذشته آن متغیر الگوسازی می کند. در مواردی که همبستگی بین مقادیر یک سری زمانی با مقادیر گذشته آن زیاد است، این الگو پیش بینی های بسیار خوبی را برای متغیر ارائه می کند.

تعداد وقفه هایی که برای توضیح رفتار یک متغیر سری زمانی در الگو لحاظ می شود، مرتبه الگوی خودرگرسیون را تعیین می کند. برای مثال، چنانچه فقط یک وقفه از متغیر

سری زمانی y_t در الگوی خودرگرسیون مورد استفاده قرار گیرد، آن را الگوی خودرگرسیون مرتبه اول می گویند و به صورت $AR(1)$ نمایش می دهند. یک الگوی $AR(1)$ به صورت زیر تصریح می شود:

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t$$

در این رابطه فرض بر این است u_t از یک فرایند پایای محض یا به عبارت دیگر یک فرایند نوفه سفید پیروی می کند و در نتیجه تمامی شرایط کلاسیک مربوط به برآورد ضرایب الگو به روش OLS را دارا است. در مواردی که $|\rho| < 1$ است می توان اثبات کرد که فرایند خودرگرسیون مرتبه اول یک فرایند پایا است.

با استفاده از عملگر وقفه L می توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \rho Ly_t + u_t \\ y_t - \rho Ly_t &= \alpha + u_t \\ (1 - \rho L)y_t &= \alpha + u_t \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز در رابطه فوق که یک معادله درجه یک بر حسب L است را معادله مشخصه می گویند و ریشه این معادله را ریشه مشخصه می نامند. همان گونه که ملاحظه می شود ریشه این معادله برابر $\frac{1}{\rho}$ است. بنابراین، اگر $|\rho| < 1$ و در نتیجه فرایند پایا باشد، ریشه معادله مشخصه بزرگ تر از یک خواهد بود. اما در مواردی که $\rho = 1$ بوده و در نتیجه فرایند $\{y_t\}$ ناپایا است، ریشه معادله مشخصه برابر یک است. بنابراین، وجود ریشه واحد به مفهوم ناپایایی است.

الگوی گام تصادفی (Random walk model)

در یک فرایند خودرگرسیون مرتبه اول $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$ چنانچه ρ مساوی یک باشد، این فرایند ناپایا خواهد بود. به چنین فرایندی که به صورت زیر نوشته می شود به اصطلاح گام تصادفی می گویند.

$$y_t = y_{t-1} + u_t$$

در این رابطه $\{u_t\}$ از یک فرایند نوفه سفید پیروی می کند. رابطه فوق چنین بیان می کند که کمیت y_t در هر مقطع

زمانی برابر کمیت آن در دوره قبل افزون بر یک مقدار تصادفی مربوط به فرایند $\{u_t\}$ است. وجه تسمیه گام تصادفی به لحاظ مشابهت آن با حرکت یک فرد ناهوشیار در طول راه است که قدم‌های وی چه از نظر اندازه و چه از آن جهت که به پیش است یا به پس، به طور کامل تصادفی است.

فرایند جمعی (Integrated process)

اگر فرایند گام تصادفی $y_t = y_{t-1} + u_t$ را از زمان یک دنبال کنیم، به فرض آنکه کمیت y در زمان صفر یعنی y_0 برابر صفر باشد، با جایگذاری‌های مکرر به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$y_t = \sum_{i=1}^T u_i$$

که در آن T تعداد مشاهدات است. از رابطه فوق مشخص است که فرایند گام تصادفی یک فرایند جمعی است، زیرا کمیت y_t منتج از حاصل جمع جبری جملات u_t است که می‌توانند مثبت یا منفی بوده باشند.

ویژگی فرایند گام تصادفی به عنوان یک فرایند جمعی آن است که تفاضل مرتبه اول آن پایا است.

یعنی:

$$y_t - y_{t-1} = u_t \\ \Delta y_t = u_t$$

همانگونه که مشاهده می‌شود سری زمانی Δy_t معادل u_t است که از یک فرایند پایای محض تبعیت می‌کند.

وقتی یک فرایند تصادفی نظیر $\{y_t\}$ با یک بار تفاضل‌گیری فرایند پایایی را نتیجه می‌دهد، به اصطلاح گویند که متغیر سری زمانی y_t جمعی از مرتبه یک است و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$y_t \sim I(1)$$

در عین حال، این نکته را می‌توان تأکید کرد که متغیری که جمعی از مرتبه یک است با یک بار تفاضل‌گیری فرایند پایایی را حاصل می‌کند. از سوی دیگر، اگر متغیری جمعی از مرتبه d یعنی $I(d)$ باشد، لازم است d بار تفاضل‌گیری صورت گیرد تا به یک سری زمانی پایا دست یافت.

الگوی خودرگرسیون مرتبه p

(AutoRegressive of order p , AR (p))

همانگونه که بیان شد، تعداد وقفه‌های لحاظ‌شده در الگوی برای الگوسازی رفتار متغیر سری زمانی y_t مرتبه الگوی خودرگرسیون را تعیین می‌کند. اکنون چنانچه به جای لحاظ کردن یک وقفه نظیر الگوی $AR(1)$ ، تعداد p وقفه متغیر y_t را در الگو لحاظ کنیم، یک الگوی خودرگرسیون مرتبه p را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$y_t = \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + u_t \\ AR(p)$$

که در آن u_t یک فرایند نوفه سفید است و عرض از مبدأ به صورت $\mu = (1 - \sum_{i=1}^p \rho_i) \mu$ تعریف می‌شود و μ میانگین فرایند است. اکنون می‌توان با استفاده از عملکرد وقفه L الگوی خودرگرسیون p را به صورت زیر نوشت:

$$y_t = \alpha + \rho_1 L y_t + \rho_2 L^2 y_t + \dots + \rho_p L^p y_t \\ (1 - \rho_1 L - \rho_2 L^2 - \dots - \rho_p L^p) y_t = \alpha + u_t$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، تابع مشخصه فرایند $AR(p)$ تابعی از درجه p برحسب L است و در نتیجه دارای p ریشه است. تعداد ریشه‌هایی از معادله مشخصه که برابر یک هستند مرتبه جمعی بودن فرایند $AR(p)$ را مشخص می‌کند. چنانچه برای مثال این معادله مشخصه دارای دو ریشه برابر یک و بقیه ریشه‌ها بزرگ‌تر از یک باشد، جمعی از مرتبه دو یعنی $I(2)$ تلقی شده و با دو بار تفاضل‌گیری از آن یک فرایند پایا حاصل خواهد شد.

با کمی کنکاش می توان نشان داد که $cov(y_t, y_{t-s})$ برای $s > 1$ معادل صفر است.

اکنون به ضریب همبستگی بین y_t و y_{t-1} توجه کنید:

$$4 - corr(y_t, y_{t-1}) = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{var(y_t)} = \frac{\theta \sigma_u^2}{(1 + \theta^2) \sigma_u^2} = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

با توجه به اینکه کوواریانس بین y_t و y_{t-s} برای $s > 1$ برابر صفر است، پس $corr(y_t, y_{t-s})$ برای $s > 1$ نیز صفر است.

به صورت کلی در یک الگوی $MA(q)$ ، ضرایب خودهمبستگی بین y_t و y_{t-s} برای $s \leq q$ مقادیر غیر صفر خواهند بود و برای $s > q$ برابر صفراند.

الگوی خودرگرسیون میانگین متحرک (AutoRegressive Moving Average Model)

ویژگی های متفاوت دو الگوی خودرگرسیون (AR) و میانگین متحرک (MA) می توانند با هم تلفیق شده و یک الگوی خودرگرسیون میانگین متحرک (ARMA) را شکل دهند. چنانچه الگوی خودرگرسیون از مرتبه p و الگوی میانگین متحرک از مرتبه q باشد، الگوی تلفیقی خودرگرسیون میانگین متحرک از مرتبه p و q خواهد بود. برای مثال، اگر $p=1$ و $q=2$ باشد الگوی $ARMA(1,2)$ به صورت زیر تصریح می شود:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} \quad ARMA(1,2)$$

این الگو را می توان با استفاده از عملکرد وقفه L به صورت زیر تصریح کرد:

$$y_t - \rho L y_t = u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t$$

$$(1 - \rho L) y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2) u_t$$

یا:

$$\rho(L) y_t = \theta(L) u_t$$

که در آن $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2$ و $1 - \rho L = \rho(L)$ است.

الگوی میانگین متحرک (Moving Average Model (MA)

شیوه دیگری که بتوان سری زمانی y_t را بر حسب مقادیر گذشته آن الگوسازی کرد، آن است که y_t را تابعی از وقفه های جملات اخلال ناهمبسته u_t قرار داد. تعداد جملات اخلال ناهمبسته لحاظ شده در الگو مرتبه فرایند میانگین متحرک را تعیین می کند. برای مثال، الگوی زیر که تنها y_t را براساس فقط یک وقفه جمله اخلال الگوسازی کرده است، الگوی میانگین متحرک مرتبه اول نامیده می شود.

$$y_t = u_t + \theta u_{t-1} \quad MA(1)$$

چنانچه در الگو به جای یک وقفه، تعداد q وقفه جمله اخلال در رگرسیون لحاظ شود یک الگوی میانگین متحرک از مرتبه q به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$y_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} \quad MA(q)$$

ویژگی جالب الگوهای میانگین متحرک آن است که همگی پایا هستند. در مفهوم ضعیف پایایی این مسئله به آن مفهوم است که میانگین، واریانس کوواریانس و ضرایب همبستگی فرایند $\{y_t\}$ در طول زمان ثابت بوده و به زمان بستگی ندارد. این مسئله را به سادگی می توان برای یک الگوی میانگین متحرک مرتبه اول به صورت زیر نشان داد:

$$1: E(y_t) = E(u_t) + \theta E(u_{t-1}) = 0 \quad \text{میانگین:}$$

$$2: var(y_t) = var(u_t + \theta u_{t-1}) = \sigma_u^2 + \theta^2 \sigma_u^2 = (1 + \theta^2) \sigma_u^2 \quad \text{واریانس:}$$

کوواریانس بین y_t و y_{t-1}

$$3: cor(y_t, y_{t-1}) = E(y_t y_{t-1})$$

$$= E[(u_t + \theta u_{t-1})(u_{t-1} + \theta u_{t-2})]$$

$$= E(u_t u_{t-1}) + \theta E(u_t u_{t-2}) + \theta E(u_{t-1}^2) + \theta^2 E(u_{t-1} u_{t-2})$$

$$= \theta \sigma_u^2$$

الگوی خودرگرسیون جمعی میانگین متحرک (ARIMA) (AutoRegressive Integrated moving (Average)

پیش شرط برآورد ضرایب الگوی ARMA به روش OLS آن است که متغیر سری زمانی مورد نظر پایا باشد. در صورتی که این متغیر پایا نبوده و لازم باشد d بار تفاضل‌گیری صورت گیرد تا یک سری زمانی پایا حاصل شود و آنگاه الگوسازی صورت گیرد، الگوی ARMA تصریح شده پس از تفاضل‌گیری را به اصطلاح الگوی خودرگرسیون جمعی میانگین متحرک یا $ARIMA(p,d,q)$ می‌نامند. در این تصریح p مرتبه AR، q مرتبه MA و d تعداد دفعاتی است که باید تفاضل‌گیری صورت گیرد تا یک فرایند پایا به دست آید.

کتاب‌شناسی

- نوفروستی، محمد (۱۳۹۵). ریشه واحد و هم‌جمعی در اقتصادسنجی، چاپ ششم، تهران: انتشارات رسا.
- Enders W. (2015). *Applied Econometric Time Series*, 4th Edition, John Wiley & Sons Ltd.
- Hatanaka M. (2003). *Time Series Based Econometrics: Unit Roots and Cointegration*, Oxford University Press.
- Kirchgassner G., J. Wallters and U. Hassler (2013). *Introduction to Modern Time Series Analysis*, 2nd Edition, Springer.
- Lutkepohl H. and M. Kratzig (2004). *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University press.

محمد نوفروستی

دانشکده اقتصاد، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران