## الگوهای سری زمانی چند متغیره

## Multivariate Time Series Models

الگوهای سری زمانی چند متغیره دارای ساختار کلی سیستم معادلات همزمان هستند. در چنین سیستمی به‌طور معمول، تمام متغیرها درون‌زا تلقی می‌شوند. این متغیرها نه‌تنها در توضیح سایر متغیرها نقش دارند، بلکه خود نیز توسط همان متغیرها توضیح داده می‌شوند.

با ظهور مکتب کلاسیک‌های جدید و فرضیه انتظارات عقلایی، الگوسازی معادلات همزمان به شیوه سنتی که براساس مبانی نظری و تصمیماتی که توسط محقق برای شناسا سازی سیستم معادلات همزمان صورت می‌گرفت شدیداً توسط کریستوفر سیمز (۱۹۸۰) مورد انتقاد واقع شد. سیمز بر این اعتقاد است که تمامی متغیرهای اقتصادی در درون سیستم اقتصادی تعیین می‌شوند و درنتیجه همه آنها درون‌زا هستند. در راستای این امر و اعتقاد سیمز به شیوه تفکر کلاسیک‌های جدید است که وی الگوی خود رگرسیون برداری (VAR) را معرفی می‌کند.

### الگوی خود رگرسیون برداری

الگوی خود رگرسیون برداری، به‌عنوان جانشینی برای سیستم معادلات همزمان سنتی، به‌گونه‌ای است که تمام متغیرها درون‌زا بوده و از یک فرایند خود رگرسیون مرتبه $P$ تبعیت می‌کنند. به‌عبارت‌دیگر، در این الگو که به‌صورت $VAR(P)$ نمایش داده می‌شود، هریک از متغیرهای الگو به‌صورت خطی به $P$ وقفه خود و همچنین $P$ وقفه سایر متغیرهای الگو وابسته است.

ساختار الگوی VAR برای سیستمی که تنها دارای دو متغیر $x$ و $y$ است به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$y_t = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{1i}\, y_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j}\, x_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$x_t = \alpha_2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{2i}\, y_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2i}\, x_{t-i} + u_t$$

وقتی الگوی VAR دارای $K$ متغیر و هر متغیر دارای $P$ وقفه است، با استفاده از نماد ماتریسی به صورت فشرده زیر نوشته می‌شود.

$$Y_t = \Phi + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \ldots + A_p Y_{t-p} + U_t \qquad U_t \sim (0, \sum_U) \qquad (۱)$$

در این الگو $Y$ها یک بردار $K\times 1$ از متغیرهای سیستم، $A$ها یک ماتریس $K\times K$ از ضرایب متغیرها و $U_t$ یک بردار $K\times 1$ از جملات اخلال نوفه سفید است. مقادیر عرض از مبدأ معادلات توسط بردار $\Phi$ که $K\times 1$ است نشان داده شده است. درعین حال بردار مربوط به امید ریاضی جملات اخلال و ماتریس واریانس کواریانس جملات اخلال به‌صورت زیر است.

$$E(U_t) = 0 \quad , \quad E(U_t \acute{U}_t) = \sum_u \qquad (۲)$$

توجه داشته باشید که $u_t$های مربوط به معادلات، بردارهای تصادفی مستقل از یکدیگرند.

الگو VAR، همان‌گونه که کولی و لروی (۱۹۸۵) بحث می‌کنند، فرم حل شده سیستم معادلات همزمان است. در این الگو، ضرایبی که برای متغیرها برآورد می‌شوند، به لحاظ اقتصادی مفهوم خاصی ندارند، به‌ویژه آنکه هر متغیر با چند وقفه در الگو ظاهر می‌شود. به‌همین‌دلیل تحلیل‌هایی که براساس الگوی VAR صورت می‌گیرد معمولاً ازطریق دنبال کردن اثر تکانه‌ای که بر یکی از متغیرهای الگو وارد می‌شود به انجام می‌رسد. به‌عبارت‌دیگر، در الگوهای VAR اثر منتج از یک تکانه خاص بر اجزاء سیستم مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

این نکته نیز در مورد الگوهای VAR قابل توجه است که تعداد متغیرهایی که می‌توانند در الگو لحاظ شوند کم است و به ندرت می‌تواند از شش یا هفت متغیر تجاوز کند، زیرا ازآنجاکه به‌طور معمول تعداد مشاهداتی که در اختیار است خیلی زیاد نیست، چنانچه تعداد متغیرها زیاد باشد و هر متغیر هم چند وقفه داشته باشد، در برآورد ضرایب الگو، درجه آزادی به شدت کاهش خواهد یافت.

یکی از سؤالات مهمی که در رابطه با الگوهای VAR مطرح است آن است که آیا متغیرهای این الگو باید پایا باشند و یا لزومی به پایایی متغیرها نیست. سیمز (۱۹۸۰) و سیمز، استاک و واتسون (۱۹۹۰) شدیداً با تفاضل‌گیری متغیرها برای تأمین شرط پایایی در الگوی VAR مخالف‌اند. به نظر ایشان، هدف از

Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

تحلیلی که در چارچوب الگوی VAR صورت می‌گیرد، تعیین وابستگی بین متغیرها است و ویژگی آماری ضرایب برآورد شده چندان مهم نیست. مسئله مخالفت با تفاضل‌گیری از آنجا ناشی می‌شود که چنین امری سبب می‌شود تا اطلاعات مربوط به هم حرکتی متغیرها، نظیر رابطه همجمعی بین متغیرها، در الگو از بین برود. به‌همین‌لحاظ، حتی در صورت ناپایایی متغیرها، ترجیح آن است که از سطح متغیرها در الگو استفاده شود.

ازسوی‌دیگر افراد زیادی نظیر اندرس (۲۰۱۵) بر این اعتقادند که متغیرهای الگوی VAR باید پایا باشند، زیرا ویژگی‌های آماری ضرایب برآورد شده در تحلیلی که صورت می‌گیرد بسیار مهم است. درهرحال، آنچه مسلم است، چنانچه بین متغیرهای الگوهای VAR همجمعی وجود داشته باشد، استفاده از تفاضل مرتبه اول متغیرها برای تأمین شرط پایایی متغیرها صحیح نیست. با انجام این امر الگوی VAR دچار خطای تصریح خواهد بود و برای برطرف کردن این مشکل لازم است خطای عدم تعادل دوره قبل در کنار تفاضل مرتبه اول متغیرها در الگو لحاظ شود. درغیر این صورت، تمامی ضرایب برآورد شده و آماره‌های $t$ و $F$ و توابع واکنش به تکانه مفهوم واقعی خویش را نخواهند داشت.

الگوی VAR هنگامی پایدار خواهد بود که تمامی متغیرهای سیستم پایا باشند. در این صورت می‌توان ضرایب تک‌تک معادلات سیستم را به روش OLS برآورد کرد و چنانچه توزیع جملات اخلال نرمال باشد، برآوردهای OLS با برآوردهایی که به روش حداکثر درست نمایی حاصل می‌شود برابر است.

یکی از مسائلی که در برآورد الگوی VAR باید تصمیم‌گیری شود، تعیین تعداد وقفه‌های متغیرهای توضیح دهنده است. گرچه می‌توان به‌هنگام وجود T مشاهده، تعداد وقفه‌های مناسب را از قاعده سرانگشتی $\sqrt[3]{T}$ به‌دست آورد، ولی به‌طور معمول تعداد وقفه‌های بهینه براساس یکی از ضوابط آکائیک (AIC)، حنان-کوئین (HQ) و یا شواتز (SC) مشخص می‌شود. محتمل آن است که بیشترین تعداد وقفه را ضابطه آکائیک (AIC) پیشنهاد کند و کمترین تعداد وقفه توسط ضابطه شواتز (SC) پیشنهاد شود. ازآنجاکه ضابطه شواتز (SC) در تعداد وقفه‌ها صرفه‌جویی می‌کند، بهره‌گیری از آن در نمونه‌های کوچک مناسب‌تر است.

## توابع واکنش به تکانه

توابع واکنش به تکانه، اثر یک تکانه غیر منتظره را بر روی مقادیر حال و آینده یک متغیر سری زمانی نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال اگر حجم پول به صورت غیر منتظره‌ای تغییر کند، موجب خواهد شد تا متغیرهای اقتصاد کلان همچون سطح تولید و سطح عمومی قیمت‌ها تغییر کنند. خیلی مهم است که مقدار اثر این تغییر را بر مقدار حال و آینده سطح تولید ناخالص داخلی و سطح عمومی قیمت‌ها بدانیم. در چارچوب الگوی VAR، تکانه‌های وارده به متغیرها را تنها می‌توان ازطریق جمله اخلال مربوط به معادله آن متغیر به سیستم وارد کرد، زیرا تنها چیزی که در سیستم برون‌زا است و در درون سیستم تعیین نمی‌شود، جملات اخلال مربوط به معادلات سیستم است.

در الگوهای سری زمانی تک متغیره به سادگی می‌توان توابع واکنش به تکانه را به‌دست آورد. به‌عنوان مثال فرایند خود رگرسیون مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید.

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t \qquad (۳)$$

باتوجه به آنکه یک فرایند پایای $AR(1)$ معادل یک فرایند $MA(\infty)$ است، خواهیم داشت:

$$y_t = u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \cdots \qquad (۴)$$

فرض کنید تکانه‌ای به اندازه $g$ در دو دوره قبل به متغیر سری زمانی $y_t$ وارد شود. به‌عبارت‌دیگر جمله اخلال $u_{t-2}$ به $u_{t-2}+g$ تغییر کند. در این صورت اثر چنین تکانه‌ای بر روی y در زمان t، همان‌گونه که از رابطه (۴) مشاهده می شود، برابر $\rho^2.g$ است. در حالت کلی، مقدار واکنش $y_t$ به تکانه‌ای در $s$ دوره قبل به اندازه $\rho^s.g$ خواهد بود، زیرا $\partial y_t / \partial u_{t-s} = \rho^s$ است. اکنون اگر این مقدار واکنش را برای تمامی s دوره وقفه $s = 1,2,3,...$ به‌دست آوریم، توابع واکنش به تکانه حاصل خواهد شد. توجه داشته باشید که به‌دلیل وجود تقارن زمانی در رابطه (۴)، اثر یک تکانه وارده به اندازه $g$ در زمان حال، بر



Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

روی $y$ در $s$ دوره آینده نیز معادل $\rho^s.g$ خواهد بود. پس، توابع واکنش به تکانه‌ای به اندازه $g$ در زمان حال بر متغیر $y$ در زمان $t+s$ را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد.

$$IRF = \rho^s.g \quad و \quad s = 0,1,2,... \qquad (۵)$$

اکنون الگوی VAR رابطه (۱) را در قالب الگوی میانگین متحرک برداری، به‌صورت زیر مورد توجه قرار دهید.

$$Y_t = \mu + U_t + B_1U_{t-1} + B_2U_{t-2} + \cdots \qquad (۶)$$

باتوجه به رابطه فوق چنانچه بردار $U_t$ به اندازه یک واحد تغییر کند، اثر این تغییر بر روی $Y$ در $s$ دوره بعد به صورت زیر مشخص خواهد شد.

$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial \acute{U}_t} = B_s \quad و \quad s = 1,2,3,... \qquad (۷)$$

حال چنانچه تکانه‌ای به اندازه بردار $G$ در زمان $t$ بر روی $Y$ وارد شود، اثر این تکانه برای کلیه زمان‌های $t+s$، $s = 1,2,\cdots$ ، در قالب توابع واکنش به تکانه، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial \acute{U}_t} = B_s.G_t \quad و \quad s = 1,2,3,... \qquad (۸)$$

با رسم این توابع می‌توان چگونگی واکنش به تکانه در متغیرهای الگو را در طول زمان مشاهده کرد.

## الگوی خود رگرسیون برداری ساختاری

در الگوهای خودرگرسیون برداری (VAR)، متغیرهای سیستم تنها از وقفه‌های متغیرهای درون سیستم تأثیر می‌پذیرند و امکان تأثیرگذاری همزمان بین متغیرها وجود ندارد. اما سیمز (۱۹۸۶و ۱۹۸۰)، برنانکه (۱۹۸۶) و شاپیرو و واتسون (۱۹۸۸) گونه دیگری از الگوهای VAR را معرفی کردند که در آن امکان تأثیرپذیری متغیرها از کمیت حال یکدیگر نیز وجود دارد. این الگوها به الگوی خودرگرسیون برداری ساختاری (SVAR) معروف شده‌اند.

برای معرفی الگوی خودرگرسیون برداری ساختاری (SVAR)، سیستم ساده‌ای را در نظر بگیرد که متشکل از دو متغیر سری زمانی $x_t$ و $y_t$ باشد. درعین‌حال اجازه دهید که هر دو متغیر $x_t$ و $y_t$ از کمیت حال یکدیگر نیز تأثیر بپذیرند.

اکنون اگر ساختار الگوی $VAR(1)$ را برای این سیستم در نظر بگیرید، معادلات این سیستم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$y_t = \beta_{10} - \beta_{12}x_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}x_{t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad (۹)$$

$$x_t = \beta_{20} - \beta_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}x_{t-1} + \varepsilon_{2t} \qquad (۱۰)$$

در این معادلات فرض بر این است که:
هر دو متغیر $x_t$ و $y_t$ پایا یعنی $I(0)$ هستند.
هر دو فرایند $\varepsilon_{1t}$ و $\varepsilon_{2t}$ نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس $\sigma_{s1}^2$ و $\sigma_{s2}^2$ هستند.
هر فرایند $\varepsilon_{1t}$ و $\varepsilon_{2t}$ ناهمبسته و مستقل از یکدیگر هستند.
در این سیستم، اثر زمان حال متغیر $x_t$ بر $y_t$ توسط ضریب $-\beta_{12}$ و اثر زمان حال $y_t$ بر $x_t$ به‌وسیله ضریب $-\beta_{21}$ تعیین می‌شود.

وقتی همزمانی تأثیر گذاری متغیر ها بر یکدیگر در یک سیستم معادلات همزمان به وجود می‌آید، متأسفانه برآورد ضرایب معادلات به روش حداقل مربعات معمولی (OLS) با مشکل مواجه می‌شود، زیرا در این حالت جملات اخلال معادلات مستقل از متغیرهای توضیح‌دهنده نیستند. برای مشاهده این مشکل به رابطه (۹) توجه کنید. در این رابطه $y_t$ متأثر از $\varepsilon_{1t}$ است. درعین‌حال $y_t$ در رابطه (۱۰) متغیر $x_t$ را متأثر می‌کند. بنابراین $x_t$ از $\varepsilon_{1t}$ به‌صورت غیرمستقیم تأثیر می‌پذیرد. درنتیجه ملاحظه می‌شود که در رابطه (۹) جمله اخلال $\varepsilon_{1t}$ از متغیر توضیح دهنده $x_t$ مستقل نیست. دقیقا نظیر همین مسئله در مورد $\varepsilon_{2t}$ رابطه (۱۰) نیز وجود دارد. درنتیجه نمی‌توان ضرایب معادلات را به روش OLS برآورد کرد.

راه‌حلی که می‌توان برای رفع مشکل برآورد ضرایب به روش OLS ارائه کرد آن است که فرم حل شده سیستم معادلات را مورد توجه قرار داد. ازآنجاکه در فرم حل شده، اثر همزمانی بین متغیرها وجود ندارد و در هر معادله، متغیر وابسته به وقفه‌های متغیرهای توضیح‌دهنده مرتبط است، جملات اخلال معادلات از متغیرهای توضیح‌دهنده مستقل خواهند بود. درنتیجه استفاده از روش OLS در برآورد ضرایب الگو بدون اشکال است.

اما اکنون این مسئله به وجود می‌آید که وقتی برای برطرف کردن مسئله همزمانی بین متغیرها و رفع مشکل اقتصادسنجی در برآورد ضرایب به روش OLS به فرم حل شده سیستم

Encyclopedia of Economics
دانشنامه اقتصاد
enceco.ihcs.ac.ir

متوسل می شویم، جملات اخلال معادلات سیستم دیگر از هم مستقل نیستند. درنتیجه دیگر نمی‌توان تکانه مستقلی ازطریق این جملات اخلال به سیستم معادلات وارد کرد و اثر آن را بر متغیرهای سیستم تحلیل نمود. بنابراین فرم حل شده الگو ازاین نظر فاقد ارزش است.

تنها راه رهایی از معضل اخیر به وجود آمده آن است که وقتی ضرایب الگوی فرم حل شده را به روش OLS برآورد کردیم، سعی کنیم ضرایب معادلات الگوی SVAR را، باتوجه‌به رابطه‌ای که ضرایب معادلات آن سیستم با ضرایب معادلات فرم حل شده دارند، به‌دست آوریم. اما متأسفانه تعداد ضرایب الگوی SVAR از تعداد ضرایب برآورد شده الگوی فرم حل شده، که دارای ساختار الگوی VAR اولیه است، بیشتر است. درنتیجه ممکن نیست که بتوان تمامی ضرایب الگوی SVAR را به این شیوه به‌دست آورد، مگر آنکه ضرایبی از سیستم معادلات الگوی SVAR را مقید به مقادیر مشخصی کرد تا تعداد ضرایب مجهول سیستم SVAR با تعداد معادلاتی که ارتباط بین پارامترهای الگوی VAR و SVAR را برقرار می‌کنند برابر شود.

در حالت کلی یک سیستم SVAR با وجود $K$ متغیر و $P$ وقفه برای هر متغیر، به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$BY_t = B_\circ + \Gamma_1 Y_{t-1} + \Gamma_2 Y_{t-2} + \cdots + \Gamma_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۱۱)$$

تعداد مجهول‌ها در این الگو عبارت از $(K-1)$ ضریب مربوط به زمان حال متغیرها، یک ضریب برای عرض از مبدأ، $K.P$ ضریب برای وقفه متغیرها و یک واریانس مربوط به جمله اخلال در هر معادله است که باتوجه‌به وجود K معادله در سیستم، جمع مجهول‌ها برابر $K(K+P.K+1)$ و یا $K^2+P.K^2+K$ خواهد بود. در مقابل، فرم حل شده الگوی SVAR رابطه (۱۱)، به‌صورت شکل کلی VAR استاندارد یا VAR اولیه زیر است.

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + U_t \qquad (۱۲)$$

اطلاعاتی که از برآورد الگوی VAR استاندارد رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید عبارت از یک ضریب برای عرض از مبدأ، $P.K$ ضریب برای وقفه متغیرها و یک واریانس جمله اخلال در هر معادله است که باتوجه‌به وجود K معادله، تعداد این موارد در مجموع برابر $K(1+P.K+1)$ و یا $2K+P.K^2$ است. درعین‌حال، به‌دلیل عدم استقلال جملات اخلال معادلات الگوی VAR از یکدیگر، به تعداد $C_2^K = \frac{K!}{2!(K-2)!}$ یعنی $\frac{K(K-1)}{2!} = \frac{K^2-K}{2}$ کواریانس وجود خواهد داشت.

به‌این‌ترتیب تعداد کل اطلاعات به‌دست آمده از الگوی VAR برابر $2K+P.K^2+\frac{K^2-K}{2}$ است. به‌این‌ترتیب اختلاف بین پارامترهای مربوط به الگوی SVAR با فرم حل شده الگوی VAR برابر است با:

$$K^2+P.K^2+K-\left(2K+P.K^2+\frac{K^2-K}{2}\right)=\frac{K^2-K}{2} \qquad (۱۳)$$

بنابراین لازم است $\frac{K^2-K}{2}$ و یا $\frac{K(K-1)}{2}$ قید بر پارامترهای الگوی SVAR وارد کرد تا الگوی SVAR کاملاً شناسا شود.

در مطالعات اولیه، عمدتاً قیدها توسط تفکیک چولکسی با قید نهادن بر روی ماتریس واریانس- کواریانس جملات اخلال به انجام می‌رسید. به‌عبارت‌دیگر یک ساختار بازگشتی به‌عنوان قید بر روابط بین متغیرهای سیستم در زمان حال تحمیل می‌شد. به جز در مواردی که منطق نظریه اقتصادی چنین ساختار بازگشتی را تأیید کند، این اقدام کاملاً سلیقه‌ای بوده و ترتیب های متفاوت چینش متغیر ها در بردار $Y_t$ به نتایج متفاوتی در مورد آثار تکانه‌ها منجر می‌شود.

رویکرد دیگری که برای شناسا سازی تکانه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، رویکرد اقتصاد سنجی سنتی برای شناسا کردن معادلات الگو در راستای پیشنهادات کمیسیون کاولز است. در این نگرش، قیدها باتوجه‌به مبانی نظری اقتصادی انتخاب شده و بر ضرایب معادلات تحمیل می‌شوند. امروزه در کارهای تجربی برای شناسا سازی تکانه‌های الگوی SVAR عمدتاً از مبانی نظری اقتصادی بهره می‌گیرند و قیدها را بر آن اساس تعیین می‌کنند.

**کتاب‌شناسی**

Bernanke, B. S. (1986). Alternative Explanations of the Money-



Encyclopedia of Economics
enceco.ihcs.ac.ir

Income Correlation. *Carnegie- Rochester Conference Series on Public Policy, 25*, 49-100.

Cooley, T. F., and Leroy, S. F. (1985). Atheoretical Macroeconometrics: A Critique. *Journal of Monetary Economics, 16*(3), 283 – 308. https://doi.org/10.1016/0304-3932(85)90038-8

Enders, W. (2015). *Applied Econometric Time Series* (4rd ed.). John Wiley and Sons.

Shapiro, M., and Watson, M. (1988). Sources of Business Cycle Fluctuations. In S. Fischer (Ed.), *NBER, Macroeconomics Annual 1988* (Vol. 3, pp. 111-148). MIT Press.

Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and Reality. *Econometrica, 48*(1), 1 – 48. https://doi.org/10.2307/1912017

Sims, C. A. (1986). Are forecasting models usable for policy analysis? *Quarterly Review of the Federal Reserve Bank of Minneapolis, 10*(1), 2-16.

Sims, C. A., Stock, J. H., and Watson, M. W. (1990). Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots. *Econometrica, 58*(1), 113 – 144. https://doi.org/10.2307/2938337

**محمد نوفرستی**

**دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی**

Encyclopedia of Economics

دانشنامه اقتصاد

enceco.ihcs.ac.ir