# مدل قیمت‌گذاری آربیتراژ (APT)

## Arbitrage Pricing Theory

نظریه قیمت‌گذاری آربیتراژ، رویکرد جدیدتری برای تعیین قیمت دارایی‌ها است. مبنای این نظریه در قانون قیمت واحد است: دو چیز یکسان، نمی‌توانند با قیمت‌های مختلفی فروخته شوند. در حقیقت، توصیف APT از تعادل، عمومی‌تر از توصیفی است که برای استخراج CAPM به‌کار می‌رود. در APT فرض می‌شود که بازده هر سهم رابطه خطی با مجموعه‌ای از عامل‌ها داشته باشد:

$$R_{it} = a_i + b_{i1}I_{1t} + b_{i2}I_{2t} + \cdots + b_{ik}I_{kt} + e_{it} \qquad (۱)$$

$a_i$: بازده مورد انتظار سهام $i$ است در صورتی‌که تمام شاخص‌ها برابر صفر باشند.

$I_{ij}$: مقدار شاخص یا عامل $j$ام است که بر بازده سهام $i$ تأثیر می‌گذارد.

$b_{ij}$: حساسیت بازده سهام $i$ به شاخص $j$ام است.

$e_{it}$: خطای تصادفی با میانگین صفر و واریانس $\sigma_{ei}^2$ می‌باشد.

برای اینکه این مدل به‌طور کامل فرایند ایجاد بازدهی برای اوراق بهادار را توصیف کند، باید فروض زیر برقرار باشد:

$$E(e_{it}) = 0 \qquad (۲)$$

برای تمام $i$ و $j$ها که $i \neq j$ است $E(e_{it}e_{jt}) = 0$

$$\text{var}(e_{it}) = E(e_{it}) = \sigma_{ei}^2$$

برای تمام سهام و شاخص‌ها $E[e_{it}(I_{jt} - \bar{I}_j)] = 0$

برای سادگی فرض کنید که بازدهی سهام $i$ می‌تواند توسط یک مدل دوعاملی به‌خوبی توصیف شود:

$$R_{it} = a_i + b_{i1}I_{1t} + b_{i2}I_{2t} + e_{it} \qquad (۳)$$

اگر یک سرمایه‌گذار اقدام به نگهداری یک سبد متنوع نماید، در این صورت ریسک پسماند آن به سمت صفر می‌رود و فقط ریسک سیستماتیک مهم خواهد بود. در معادله فوق، $b_{i1}$ و $b_{i2}$ بیانگر ریسک سیستماتیک سبد دارایی هستند که به‌ترتیب در ارتباط با شاخص‌های $I_{1t}$ و $I_{2t}$ می‌باشند. بدین‌معنی که $b_{i1}$ حساسیت بازدهی سهام $i$ را به شاخص (عامل) $I_{1t}$ نشان می‌دهد. به‌عبارت‌دیگر، ضریب $b_{i1}$ نشان می‌دهد که بازده سهام $i$ چقدر در معرض نوسانات $I_{1t}$ قرار دارد. معمولاً فرض می‌شود که سرمایه‌گذار فقط به ریسک و بازده انتظاری توجه می‌کند، براین‌اساس، برای بررسی و تحلیل هر سبد دارایی به سه چیز نیاز دارد: بازده انتظاری سبد دارایی $(\bar{R}_p)$ و ریسک یا حساسیت به شاخص‌ها ($b_{p1}$ و $b_{p2}$). برای ادامه بحث، تصور کنید که سه سبد دارایی متنوع شده داریم که در جدول ۱ نشان داده شده‌اند:

**جدول ۱.**

| سبد دارایی | بازده انتظاری | $b_{i1}$ | $b_{i2}$ |
|---|---|---|---|
| A | ۱۵ | ۱/۰ | ۰/۶ |
| B | ۱۴ | ۰/۵ | ۱/۰ |
| C | ۱۰ | ۰/۳ | ۰/۲ |

با داشتن این سه سبد، هر سبد جدیدی که ترکیب خطی از آنها باشد، قابل‌تعیین است. ازطرف‌دیگر، رابطه بازده انتظاری و ریسک را برای هر سبد دارایی می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\bar{R}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \qquad (۴)$$

رابطه (۳) یک رابطه تعادلی است که بازده انتظاری را برحسب ریسک بیان می‌کند. برای تعیین $\lambda_0$، $\lambda_1$ و $\lambda_2$ نیاز به برخی داده‌ها داریم: جدول ۱ اطلاعات مربوط به سه سبد را ارائه می‌کند که با استفاده از آن، خواهیم داشت:

$$i = A \Rightarrow \bar{R}_A = 15 = \lambda_0 + \lambda_1 + 0/6\lambda_2$$

$$i = B \Rightarrow \bar{R}_B = 14 = \lambda_0 + 0/5\lambda_1 + \lambda_2$$

$$i = C \Rightarrow \bar{R}_C = 10 = \lambda_0 + 0/3\lambda_1 + 0/2\lambda_2$$

با حل معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\lambda_0 = 7/75 \quad , \quad \lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 3/75$$

بنابراین، برای این سه سبد و هر سبد دیگری که ترکیب خطی از این سه سبد باشد می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\bar{R}_i = 7/75 + 5b_{i1} + 3/75b_{i2} \qquad (۵)$$

بنابراین، فرصت آربیتراژ منجر به ایجاد سبدی مانند $P$ شده است که خصوصیات زیر را دارد:

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \qquad (۶)$$

همچنین حساسیت سبد $P$ به شاخص‌های $I_{1t}$ و $I_{2t}$ برابر است

با:

$$b_{P1}=\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i1} \qquad (۷)$$

$$b_{P2}=\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i2}$$

و مجموع سهم هریک از سبدهای ۱ تا $N$ در سبد $P$ برابر با ۱ است:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad (۸)$$

به‌عنوان مثال فرض کنید که سبد جدید $P$ را براساس جدول ۱ تعریف می‌کنیم به‌گونه‌ای که سهم هریک از سبدهای $A$، $B$ و $C$ برابر با $X_A=0/3, X_B=0/2, X_C=0/5$ باشد. لذا $b_{Pj}$ برابر است با:

$$b_{P1}=0/3(1)+0/2(0/5)+0/5(0/3)=0/55$$

$$b_{P2}=0/3(0/6)+0/2(1)+0/5(0/2)=0/48$$

و بازده سبد $P$ برابر با $\bar{R}_P=0/3(15)+0/2(14)+0/5(10)=12/3$ است. بدیهی است که بازده سبد $P$ را می‌توان از معادله (۵) نیز به‌دست آورد ($\bar{R}_P=7/75+5(0/55)+3/75(0/48)=12/3$).

سبد $P$ ترکیب خطی از سه سبد $A$، $B$ و $C$ است و براساس بازده و ریسک نمی‌توان گفت که کدامیک برتری دارند. بنابراین، هر سبد دلخواه را می‌توان با سبدهای $A$، $B$ و $C$ و یا ترکیبی از این سه سبد (مانند $P$) مقایسه کرد و نتیجه‌گیری نمود. بدین‌منظور، سبد جدیدی مانند $E$ را در نظر بگیرید که بازده انتظاری آن ۱۵٪ و $b_{i1}$ و $b_{i2}$ نیز به‌ترتیب ۰/۶ و ۰/۶ می‌باشند.

حال سؤال این است که آیا سبد $E$ بهتر از سبدهای $A$، $B$ و $C$ و یا هر ترکیبی از این سه سبد است. ازآنجاکه $b_{i1}$ و $b_{i2}$ برای سبد $E$ مشابه هیچ‌یک از این سه سبد نیست، لذا ترکیبی از این سه سبد را انتخاب می‌کنیم که سبد جدیدی مانند $D$ است. می‌خواهم سبد $D$ دارای $b_{D1}=0/6$ و $b_{D2}=0/6$ باشد. سبد $D$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$b_{D1}=X_A(1)+X_B(0/5)+X_C(0/3)=0/6$$

$$b_{D2}=X_A(0/6)+X_B(1)+X_C(0/2)=0/6$$

$$X_A+X_B+X_C=1$$

با حل این معادلات، مقادیر $X_A=X_B=X_C=\frac{1}{3}$ را خواهیم داشت. لذا بازدهی سبد $D$ برابر با $\bar{R}_D=\frac{1}{3}(15)+\frac{1}{3}(14)+\frac{1}{3}(10)=13$ است. همچنین می‌توان بازده سبد $D$ را از معادله (۵) به‌دست آورد. بدین‌ترتیب، سبد $D$ و $E$ ازلحاظ ریسک، یکسان هستند ولی بازدهی انتظاری آنها متفاوت است.

طبق قانون قیمت واحد، دو سبد دارایی که ریسک یکسانی دارند، نباید بازده انتظاری متفاوت (ارزش متفاوت) داشته باشند. در این شرایط، آربیتراژ افراد را ترغیب به خرید سبد $E$ و فروش سبد $D$ می‌کند. با خرید سبد $E$ و تأمین مالی آن ازطریق فروش (یا فروش استقراضی) سبد $D$، یک سود بدون ریسک (بدون نیاز به سرمایه‌گذاری و ریسک اضافی)، تضمین خواهد شد.

شرط عدم آربیتراژ مستلزم آن است که اگر مبلغ سرمایه‌گذاری برابر با صفر باشد، در این صورت در شرایط بدون ریسک، باید بازده انتظاری سبد دارایی برابر صفر باشد. براساس مباحث فوق، شرط عدم آربیتراژ را برای حالتی که $N$ دارایی یا $N$ سبد دارایی داشته باشیم (با فرض مدل دو شاخصی) به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 0 \qquad (۹)$$

$$b_{R1}=\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i1}=0 \qquad (۱۰)$$

$$b_{R2}=\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i2}=0 \qquad (۱۱)$$

$$\bar{R}_R=\sum_{i=1}^{N} X_i R_i=0 \qquad (۱۲)$$

معادلات فوق را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب بردارها

نوشت:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = [X_1 \cdots X_N]\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} = \mathbf{xl} = 0 \quad (۱۳)$$

$$b_{R1} = \sum_{i=1}^{N} X_i b_{i1} = [X_1 \cdots X_N]\begin{bmatrix}b_{11}\\ \vdots\\ b_{N1}\end{bmatrix} = \mathbf{xb_1} = 0 \quad (۱۴)$$

$$b_{R2} = \sum_{i=1}^{N} X_i b_{i2} = [X_1 \cdots X_N]\begin{bmatrix}b_{12}\\ \vdots\\ b_{N2}\end{bmatrix} = \mathbf{xb_2} = 0 \quad (۱۵)$$

$$b_R = [X_1 \cdots X_N]\begin{bmatrix}\bar{R}_1\\ \vdots\\ \bar{R}_2\end{bmatrix} = \mathrm{x}\bar{\mathrm{R}} = 0 \quad (۱۶)$$

روابط فوق نشان می‌دهد که بردارها، متعامد هستند.

به‌عنوان مثال، معادله $\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i1} = 0$ بدان‌معنا اســت که «بردار نســبت‌های اوراق بهادار» بر «بردار $b_{i1}$ها» عمود هســتند. به‌طور مشــابه معادله اول، یعنی $\sum X_i = 0$، بدان‌معنا اســت که «بردار نســبت‌های اوراق بهادار» بر «بردار ۱»، عمود هســتند. اگر بردار نســبت‌های ســبد دارایی بر بردار ۱، بردار $b_{i1}$ها و بردار $b_{i2}$ها عمود با شد، بدان‌معنا ا ست که «بردار نسبت‌های اوراق بهادار» بر «بردار بازده‌های انتظاری» عمود اســت. اما یک بردار به $N-1$ بردار عمود با شد، در این صورت به بردار $N$ام نیز عمود خواهد بود و لذا بردار $N$ام را می‌توان به‌صــورت ترکیب خطی از بردار ۱، بردار $b_{i1}$ها و بردار $b_{i2}$ها بیان نمود. لذا $\bar{R}_P$ ترکیب خطی از ســه بردار $\mathbf{b}_1$، $\mathbf{b}_2$ و $\mathbf{l}$ می‌باشــد. به‌عبارت‌دقیق‌تر چهار بردار $\mathbf{l}$، $\mathbf{b}_1$، $\mathbf{b}_2$ و $\bar{\mathbf{R}}$ دارای یک ترکیب خطی هستند:

$$a_0\mathbf{l} + a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\bar{\mathbf{R}} = 0 \quad (۱۷)$$

حال می‌توان $\bar{\mathbf{R}}$ را برحسب سه بردار دیگر نوشت:

$$\bar{\mathbf{R}} = \lambda_0\mathbf{l} + \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 \quad (۱۸)$$

که $\lambda_0 = -\frac{a_0}{a_3}$، $\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_3}$ و $\lambda_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ است. رابطه فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}\bar{R}_1\\ \vdots\\ R_i\\ \vdots\\ \bar{R}_N\end{bmatrix} = \lambda_\circ\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} + \lambda_1\begin{bmatrix}b_{11}\\ \vdots\\ b_{i1}\\ \vdots\\ b_{N1}\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}b_{12}\\ \vdots\\ b_{i2}\\ \vdots\\ b_{N2}\end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

بنابراین، بازده انتظاری دارایی یا سبد $i$ام عبارت است از:

$$\bar{R}_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \quad (۲۰)$$

این معادله برای تمام اوراق بهادار و تمام ســبدهای دارایی برقرار ا ست. $\lambda_j$ بیانگر بازده مازادی ا ست که به ازای یک واحد ریسک ناشی از شاخص $I_{jt}$ مطالبه می‌شود. یعنی اگر $b_{ij}$ از صفر به یک افزایش یابد، انتظار براین اســت که بازدهی به اندازه $\lambda_j$ افزایش یابد.

**کتاب‌شناسی**


التون، ا.، گروبر، م.، براون، ا.، و گوتزمان، و. (۱۳۹۱). *نظریه جدید سبد دارایی و تحلیل سرمایه‌گذاری* (ترجمه ع. سوری). پژوهشکده پولی و بانکی. (تاریخ انتشار به زبان اصلی ۲۰۱۰)

بلکول، د.، و گریفیتس، م. د.، و وینترز، د. ب. (۱۳۹۳). *بازارهای مالی مدرن* (ترجمه ن. مهرگان). پژوهشکده پولی و بانکی. (تاریخ انتشار به زبان اصلی ۲۰۰۶)

Chen, N. (1981). *The Arbitrage Pricing Theory: Estimation and Applications*. Graduate School of Management.

Roll, R., and Ross, S. A. (1980). An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory. *The Journal of Finance*, *35*(5), 1073 - 1103. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1980.tb02197.x

Ross, S. A. (1976). The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, *13*(1), 341-360.



**علی سوری**

**دانشکده اقتصاد، دانشگاه تهران**